Теория игр и ИО

Морозов Владимир Викторович.

1) Васин, Морозов „Теория игр и модели тактич. реш." („зеленая")

2) Васин, Краснощёнов, Морозов „ИО" („темная")

3) Морозов, Сухарев, Федоров „Задачи и упр. по ИО"

1 кр в начале апреля (обязательно)

Глава 1

09.02.15

Антагонистические игры. (АИ)

§2. Седловые точки и АИ

~~Опр.~~ $\exists F(x,y)$, $x \in X$, $y \in Y$, $F: X \times Y \to R$

Опр. пара $(x^0, y^0) \in X \times Y$ наз. седловой точкой ф-ии f, если

$$f(x, y^0) \le f(x^0, y^0) \le f(x^0, y) \quad \begin{matrix} \forall x \in X \\ \forall y \in Y \end{matrix} \qquad (1)$$

В игре принимают участие 2 игрока.

$x \in X \to$ 1 бит

$y \in Y \to$ 2 бит

Если x и y независимы, то игра в норм. форме

Есть $F(x,y)$ на $X \times Y$ — ф-я выигрыша 1-го игрока

~~и~~ АИ, если $-F(x,y)$ — проигрыш 2-го игрока

$\Rightarrow$ 1-ый максимизирует F, 2-ой — минимиз. ет.

$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle$.

седловая точка — устойчивое положение в игре.

Опр. $\Gamma^{(АИ)}$ имеет реш-е, если $F(x,y)$ имеет седловую точку на $X \times Y$.

(x^0, y^0, v) : (x^0, y^0) — седл. точка (оптим. страт.), $v = F(x^0, y^0)$ (значение игры (цена игры)) — реш-е АИ Γ.

Лемма 1 (корректность v).

$\exists$ $(x^0, y^0), (x^*, y^*)$ — седл. т. F

Тогда $F(x^0, y^0) = F(x^*, y^*)$

Док-во:

(1*) $F(x, y^0) \le F(x^0, y^0) \le F(x^0, y)$ $\forall (x,y) \in X \times Y$.

(2*) $F(x, y^*) \le F(x^*, y^*) \le F(x^*, y)$ $\forall (x,y) \in X \times Y$.

$F(x^0, y^0) \overset{(1^*)}{\le} F(x^0, y^*) \overset{(2^*)}{\le} F(x^*, y^*) \overset{(2^*)}{\le} F(x^*, y^0) \overset{(1^*)}{\le}$

$\overset{(1^*)}{\le} F(x^0, y^0)$ $\Rightarrow$ везде (=) $\Rightarrow$ (#).

Упр.

(x^0, y^0), (x^*, y^*) – седл. т. (СТ)

Тогда (x^0, y^*), (x^*, y^0) – СТ.

СТ: $\max\limits_{x \in X} F(x, y^0) = F(x^0, y^0) = \min\limits_{y \in Y} F(x^0, y)$ N(1).

Опр. АИГ, наш-ся матричной, если, X и Y конечны, т.е. $X = \{1, \dots, m\}$, $Y = \{1, \dots, n\}$ (номера стратегий)

$i \in X$, $j \in Y$, $F(i, j) = a_{ij}$.

$A = (a_{ij})_{m \times n}$

Стр. → 1 игр
Стб → 2 игр

Опр. (i^0, j^0) – СТ A, если $\forall i = \overline{1, m}$ $\forall j = \overline{1, n}$ N(1)

$a_{ij^0} \le a_{i^0 j^0} \le a_{i^0 j}$

$A = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{i^0 j^0} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$ i^0, j^0

→ max в стб
min в стр

Примеры:

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ СТ

$(i^0, j^0) = (1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2)$.

$v = 0$

$q_{1,2} = 0 = 0$, но $(1,2)$ - не сл!

2) игра "Орлянка"

$$A = \begin{matrix} & \overset{0}{\leftarrow} & \overset{+}{P} \\ \overset{0}{P} & -1 & 1 \\ \overset{+}{P} & 1 & -1 \end{matrix}$$

2-ой отталкивается

нет РТ, т.е. нет реш-я.

$\exists x \in X.$

$\inf\limits_{y \in Y} \widetilde{F(x,y)}$ - гарантир. выигрыш 1-го.

$\Rightarrow W(x)$

, наил. гарант. выигрыш

$\underline{v} = \sup\limits_{x \in X} \inf\limits_{y \in Y} F(x,y)$ - нижнее значение игры

Опр. x^0 - максиминная, если вып-ся

$\inf\limits_{y \in Y} F(x^0, y) = \underline{v}$

$\exists y \in Y.$

$\sup\limits_{x \in X} F(x,y)$ - наим. гарантир. 2-го.

$\bar{v} = \inf\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X} F(x,y)$ - верхнее значение игры.

Опр. y^0 - минимаксная, если вып-ся

$\sup_{x \in X} F(x, y^0) = \overline{v}$.

Лемма 2

для АИБ $\underline{v} \le \overline{v}$ — "плохой средн хороших"

"хороший средн плохих"

Доказ-во:

$\forall x \in X,\ y \in Y$

$\inf_{y \in Y} F(x,y) \le F(x,y) \le \sup_{x \in X} F(x,y)$

ϕ-ла от x. ϕ-ла от y

$\Rightarrow \underline{v} \le \sup_{x \in X} F(x,y) \quad \forall y \in Y.$

$\Rightarrow \underline{v} \le \overline{v}$. (#)

Теорема 1.1 (необх. и дост. усл-е $\exists$ СТ)

1) $\forall F(x,y)$ $\exists$ СТ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x,y) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x,y)$ (*)

(т.е. в АИ $\underline{v} = \overline{v} = v$).

2) 1 вып. α.

Тогда (x^0, y^0) – с ϕ mF $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \inf_{y \in Y} F(x^0, y) = \underline{v} \\ \sup_{x \in X} F(x, y^0) = \overline{v} \end{cases}$

т.е. x^0 – максимин

y^0 – минимакс

Док-во:

Необх:

(x^0, y^0) – сед. $\Rightarrow (\alpha), (\beta)$ — *каждое рав-во.*

$\overline{v} = \inf\limits_{y\in Y} \sup\limits_{x\in X} F(x,y) \overset{1)}{\leq} \sup\limits_{x\in X} F(x, y^0) \overset{(1)}{=}$

$\overset{(1)}{=} F(x^0, y^0) \overset{(1)}{=} \inf\limits_{y\in Y} F(x^0, y) \overset{2)}{\leq} \sup\limits_{x\in X} \inf\limits_{y\in Y} F(x,y) = \underline{v} \leq$

$\overset{\text{л.2}}{\leq} \overline{v}.$

$\Rightarrow$ везде $=$. т.е. 1) y^0 – миним. сбоя.
2) x^0 – макс. сбоя.

$\Rightarrow$ можно вместо inf (внешнего) писать min

– " – sup – " – max

т.е. $\exists \max(\alpha)$ #

Док:

$\exists \max(\alpha)$.

возьмём x^0, y^0, удовл. (β). $\overset{?}{\Rightarrow} (x^0, y^0)$ – сед.

$F(x^0, y^0) \overset{1)}{=} \sup\limits_{x\in X} F(x, y^0) \overset{(\beta)}{=} \overline{v} \overset{(\alpha)}{=} \underline{v} \overset{(1)}{=}$

$= \inf\limits_{y\in Y} F(x^0, y) \overset{1)}{\leq} F(x^0, y^0)$

$\Rightarrow$ везде $=$. $\Rightarrow$ можно вместо sup писать max, inf писать min

#

Стратегия поиска всех СТ:

$X^0 = \{x^0 \mid (\beta)\}$

$Y^0 = \{y^0 \mid (\beta)\}$

$X^0 \times Y^0$ - мн-во всех СТ

в частности, у матрицы (3×3) не м.б. 5 седл. точек

Пример

1) $F(x,y) = xy$ $\quad x \in X = (-\infty, \infty)$
$y \in Y = (-\infty, \infty)$

$(x^0, y^0) = (0,0)$. (другие нет)

$$x \cdot 0 \equiv 0 \cdot 0 \equiv 0 \cdot y$$

$$\forall x \neq 0 \Rightarrow \inf_{y \in Y} xy = -\infty.$$

2) (как задача 1-го уровня сл/р)

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 7 & -2 \\ 7 & 2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \max_{i=1,4} a_{ij} \\ -4 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{matrix}$$

$\max a_{ij}$ — $\underline{v} = 2$.
$i=1,4$

$i^0 = 2,3$

$\max_{i=1,4} a_{ij}$ — $\bar{v} = 2$, $j^0 = 2,4$.

$\underline{v} = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij}$ - нижн. цена игры, нижняя чистая стр.

$\bar{v} = \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le m} a_{ij}$

$\Rightarrow$ $X^0 : \{\frac{2}{3}, 3\}$, $Y^0 : \{2, 4\}$

3) (3-ий уровень в ц(р))

$F(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2$

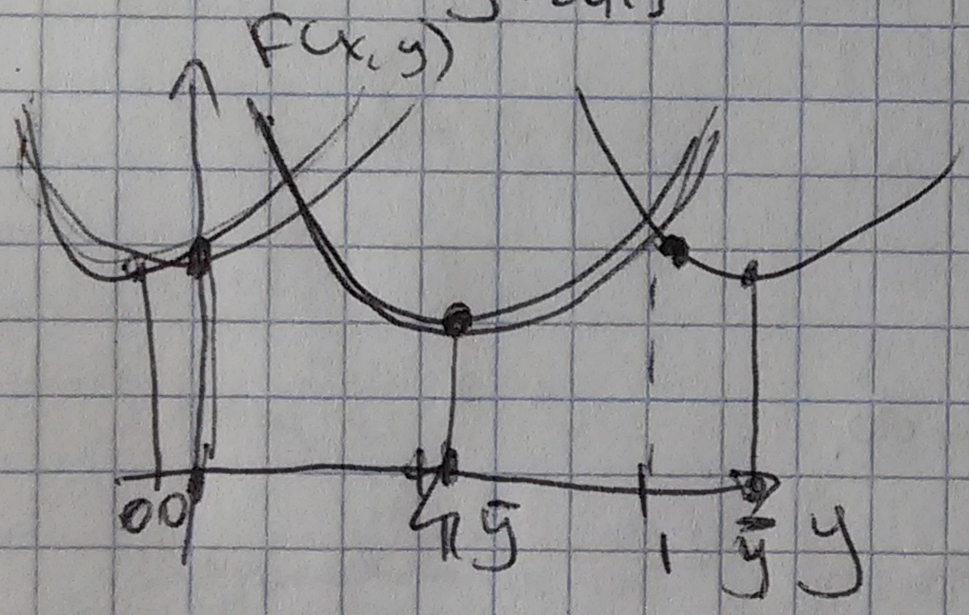
$X = [0,1]$, $Y = [0,1]$.

$\underline{U} = \max\limits_{x\in[0,1]} \min\limits_{y\in[0,1]} F(x,y)$

фикс.

ф. д получаем ответ.

$W(x) = \min\limits_{y\in[0,1]} f(x,y) = F(x, y(x))$.



$F'_y = -3x + 2y = 0$.

$y = \frac{3x}{2} \in [0,1] \Leftrightarrow x \in [0, \frac{2}{3}]$

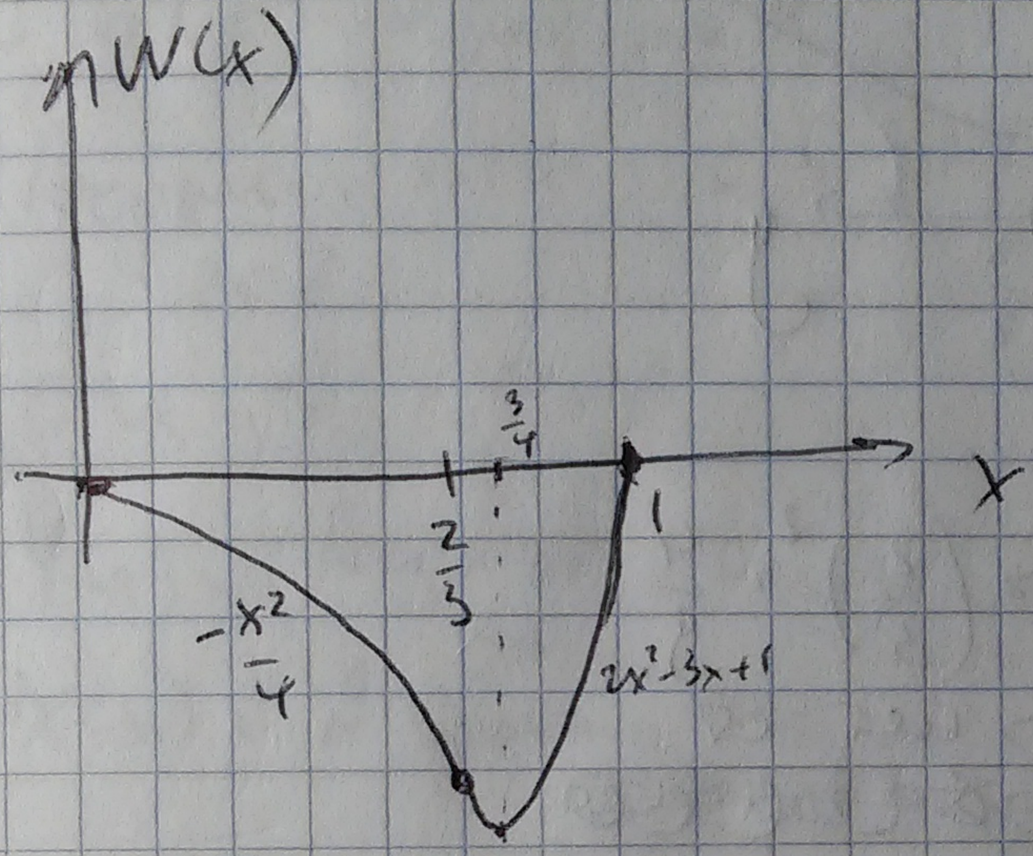
$y = 1, \quad x \in [\frac{2}{3}, 1]$.

ф. д получаем ответ.

$\Rightarrow y(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2}, & x \in [0, \frac{2}{3}] \\ 1, & x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$

$$W(x) = F(x, y(x)) = \begin{cases} 2x^2 - 3x \cdot \frac{3x}{2} + \left(\frac{3}{2}x\right)^2, & x \in [0, \frac{2}{3}] \\ 2x^2 - 3x + 1, & x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{x^2}{4}, & x \in [0, \frac{2}{3}] \\ 2x^2 - 3x + 1, & x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$



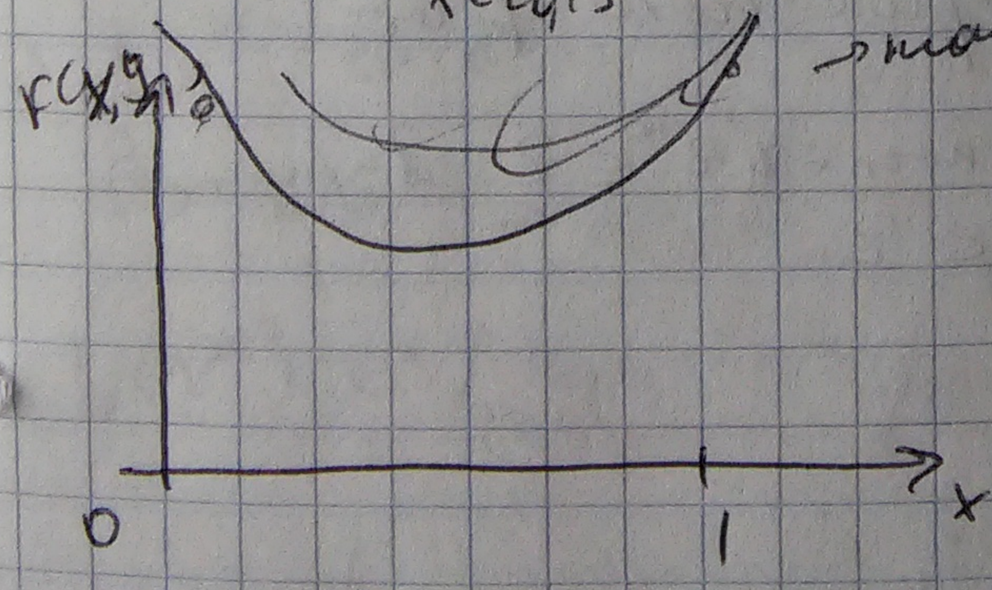
$$\underline{v} = \max_{x \in [0;1]} W(x) = 0, \quad X^0 = \{0; 1\}$$

двойн.

$$\bar{v} = \min_{0 \le y \le 1} \max_{0 \le x \le 1} F(x, y)$$

Аналогично:

$$M(y) = \max_{x \in [0;1]} F(x, y) \quad (=)$$

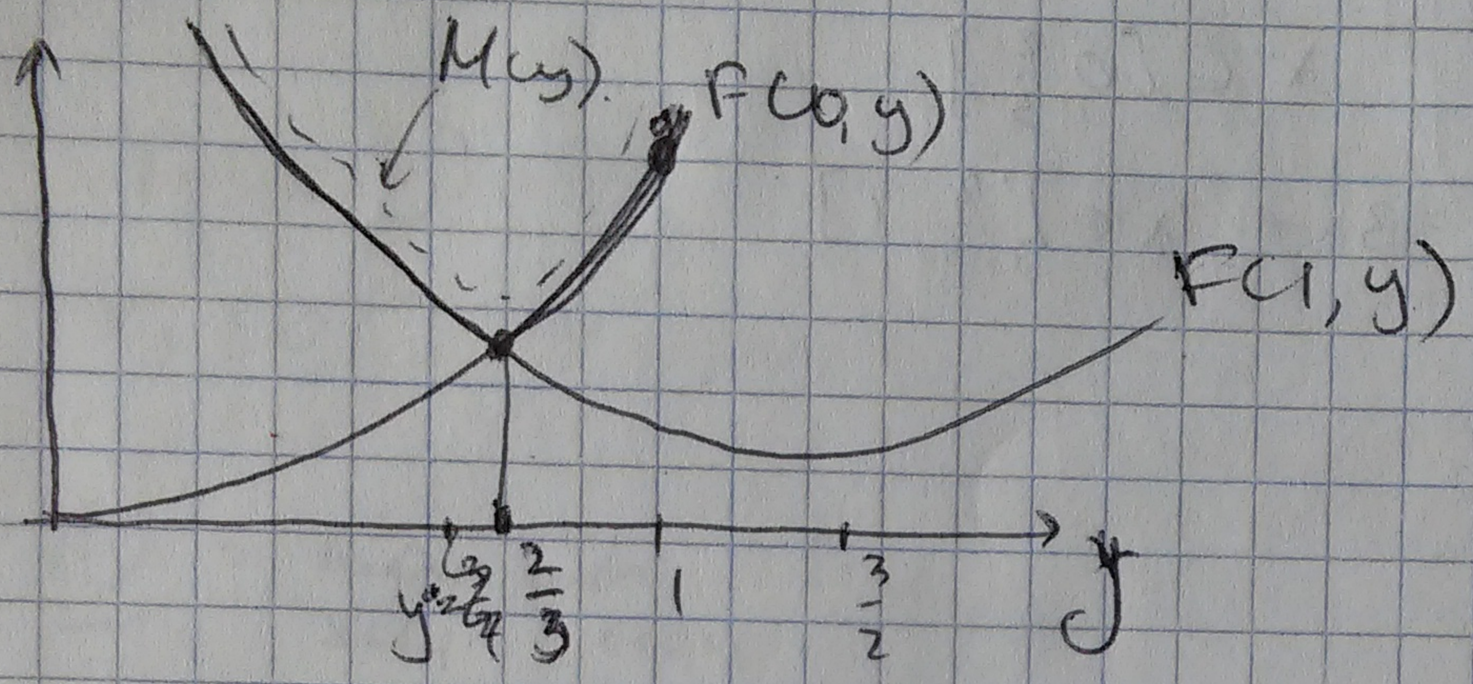


→ max на концах.

(=) $\max [F(0, y), F(1, y)]$.

$F(0,y) = y^2$

$F(1,y) = 2 - 3y + y^2$.



2) $\bar{v} = \min M(y) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

yeTaiS

$\Rightarrow$ нет ст.

$\Rightarrow \bar{v} < v$ ~~бесконечно~~.

$y_z \frac{2}{3}$.

4) $f(x,y) = -2x^2 - 3xy + y^2$.

$\Rightarrow$ есть ст. $\rightarrow$ решить !!

$\exists z$ – полная метрического пр-ва.

$\rightarrow$ если $\forall$ пол-ть $z^k \in Z$ $\exists$ п/пол-ть z^{k_l}, сход. к-л к $z^0 \in Z$.

Утверждение

$\exists z^k \in Z$. и z^k имеет ! непод. точку



] $h(z)$ опред. на Z.

$\operatorname{Argmax}\limits_{z\in Z} h(z) = \{ z' \mid h(z') = \max\limits_{z\in Z} h(z) \}$

$F(x,y)$, $X \times Y$.

$Y(x) = \operatorname{Argmin}\limits_{y\in Y} F(x,y)$ — мн-во наим. ответов y

$X(y) = \operatorname{Argmax}\limits_{x\in X} F(x,y)$.

Теорема 1.2

$\exists F(x,y)$ непр. в $X \times Y$, X и Y – комп. топ. п-в.

Тогда 1) $W(x) = \min\limits_{y\in Y} F(x,y)$ – непр. по x на X

2) $Y(x) = \{ y(x) \}$ $\forall x \in X$ ($\exists ! y$)

Док-во:

1) $\exists x^k \to x^0 \in X$

$\Rightarrow W(x^k) \to W(x^0)$

$W(x^k) \in [\min\limits_{(x,y)\in X\times Y} f ; \max\limits_{(x,y)\in X\times Y} f]$

W' – предел т. $W(x^k)$, т.е. $W(x^k) \to W'$.

$w^1 = w(x^0)$

$y^{k_t} \in Y(x^{n_t})$

можно выделить сх-ся п/пос-ть, сход. сх-ся к $y' \in Y$.
$(\exists y^{k_t})$

Докажем, что $y' \in Y(x^0)$.

$F(x^{k_t}, y^{k_t}) \le F(x^{k_t}, y) \quad \forall y \in Y.$

$F(x^0, y') \le F(x^0, y) \quad \forall y \in Y$

$w(x^{k_t}) = F(x^{k_t}, y^{k_t}) \Rightarrow F(x^0, y') = w(x^0)$

w^1

$\Rightarrow$ ч.т.д. ($w^1 = w(x^0)$). #

Докажем 2):

$x^k \to x^0, \quad x^k \in X$

$y(x^q) \to y(x^0)$

$y^1 \quad y(x^q)$

т. к. $\exists y^{k_t} : y(x^{n_t}) \to y' \in Y(x^0) = \{y(x^0)\}$

$y^1 = y(x^0)$. ⊛

Ун.

1) $M(y) = \max\limits_{x \in X} F(x, y)$

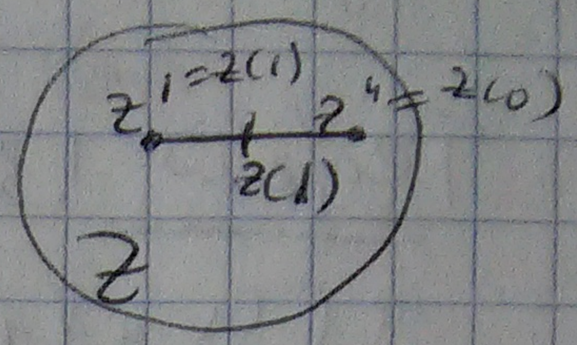
2) $\arg\max\limits_{x \in X} F(x, y) = \{x(y)\}$ ⊛

Опр. АИФ наз-ся непр., если $F(x, y)$ непр. на $X \times Y$.

Опр. $\mathbb{Z}_1$ нед-во вып., если

$\forall z', z'' \in \mathbb{Z}_1, \forall \lambda \in (0,1)$

$z(\lambda) = \lambda z' + (1-\lambda) z'' \in \mathbb{Z}_1$

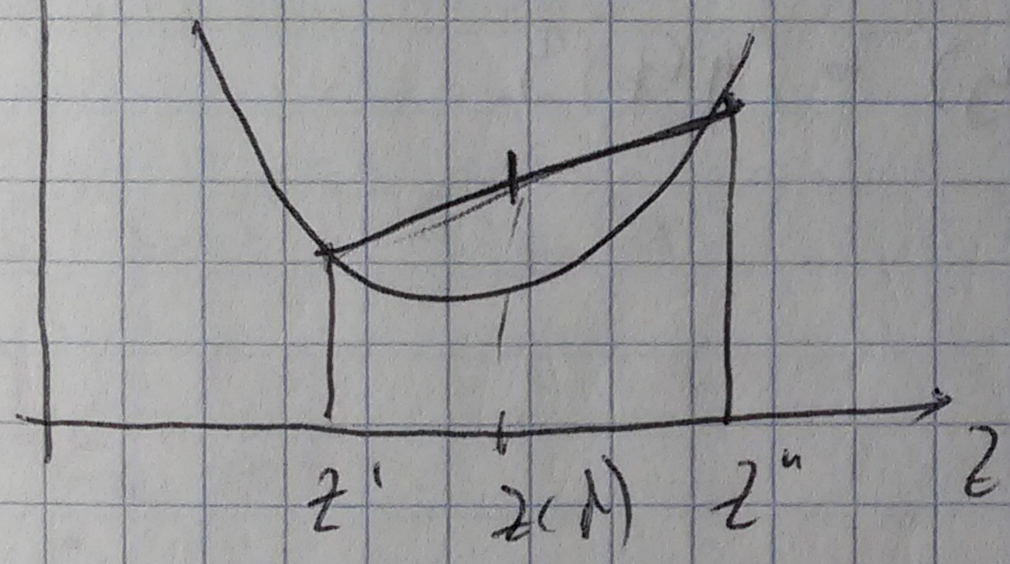


$h(z), z \in \mathbb{Z}_1$

Опр $h(z)$ вып., если

$\forall z', z'' \in \mathbb{Z}_1, \forall \lambda \in (0,1)$

$h(\lambda z' + (1-\lambda) z'') \leq \lambda h(z') + (1-\lambda) h(z'')$



Если $h''(z) > 0$, то $h(z)$ строго вып.

$<$

≥ 0 $h(z)$ вып.

≤ 0 вогн.

$h(z) = \sum_{j=1}^{n} z_j^2$ - строго вып.

$\forall h$.

$\exists \bar{h}(z)$ непр. по вып. мн. $\mathbb{Z}_1$.

~~Теорема~~ Если $h(z)$ непр. и строго вог, то ! мин.

Теорема 1.3

$\exists f(x,y)$ непр. по $X \times Y$ комп., $X \subset E^n$, $Y \subset E^m$

$\forall y \in Y \; f(x,y) \; \cap_x$ } вогнуто-вып. ф-я.

$\forall x \in X \; f(x,y) \; \cup_y$

Тогда $\exists$ СТ.

Доказ-во

1) $\exists f(x,y)$ строго $\cup_y$

$Y(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{Argmin}} f(x,y) = \{y(x)\}$.

$y(x)$ - непр.

$w(x) = \min\limits_{y \in Y} f(x,y)$

$x^*: \; w(x^*) = \max\limits_{x \in X} w(x)$

Докажем, что $(x^*, y(x^*))$ - СТ F.

$\forall x \in X \; \forall t \in (0,1)$

$(1-t)x^* + tx \in X$.

$\tilde{y} = y((1-t)x^* + tx) \in Y$

$w(x^*) \geq w((1-t)x^* + tx) = F((1-t)x^* + tx, \tilde{y}) \geq$

$\overset{F \text{ вып}_x}{\geq} (1-t) f(x^*, \tilde{y}) + t f(x, \tilde{y}) \geq$

$\geq (1-t)w(x^*) + t\,F(x,y)$

$\Rightarrow t\,F(x,y) \leq t\,w(x^*) \quad | : t>0.$

$t \to 0+ \;(y \to y(x^*))$

$F(x, y(x^*)) \leq w(x^*) = f(x^*, y(x^*)) \leq F(x,y) \;\forall y.$

$\Rightarrow$ сед. #

II) теорема нет $\forall$ строгой $\cup_y$. $y = (y_1, \dots, y_n)$

Рассм. $F_\varepsilon(x,y) = F(x,y) + \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j^2$

f_ε строго $\cup_x$ (из-за добавки)

$(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ – сед F_ε

$f_\varepsilon(x, y^\varepsilon) \leq F_\varepsilon(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \leq F_\varepsilon(x^\varepsilon, y) \quad \forall x, y$

$\exists\, \varepsilon_k \to 0+.$

$(x^{\varepsilon_k}, y^{\varepsilon_k}) \to (x^0, y^0).$ $\varepsilon = \varepsilon_k$

в пределе.

$\Rightarrow$ сед. #

Пример

$F(x,y) = xy - \;,\; x = [0,1]$
$y = [0,1].$

$(0,0)$ – сед. , $v = \underline{v} = \overline{v} = 0.$

$\forall x$ - максимизация

$x^* = \{y(x)\}$ $\quad y(x) = [0,1]$

$y^* = 1$.

x^*, y^* - минимизирующие, но не сед.!!

Пример

$F(x,y) = -x^2 + y^3 + y^2 x - 4y + 3$.

$X = [0,1]$, $Y = [0,1]$.

$F''_{xx} = -2 < 0$. $\Rightarrow$ ~~F(x)~~ чего $\cap_x$.

$F''_{yy} = -6y + 2x \geq 0$ $\quad$ не $\forall x, y$ $\Rightarrow \cup_y$.

$x(y)$: $\quad F(x(y), y) = \max\limits_{x \in [0,1]} F(x,y)$

$F'_x = -2x + y^2 \geq 0$.

$\bar{x} = \frac{y^2}{2}$, $\in [0,1]$

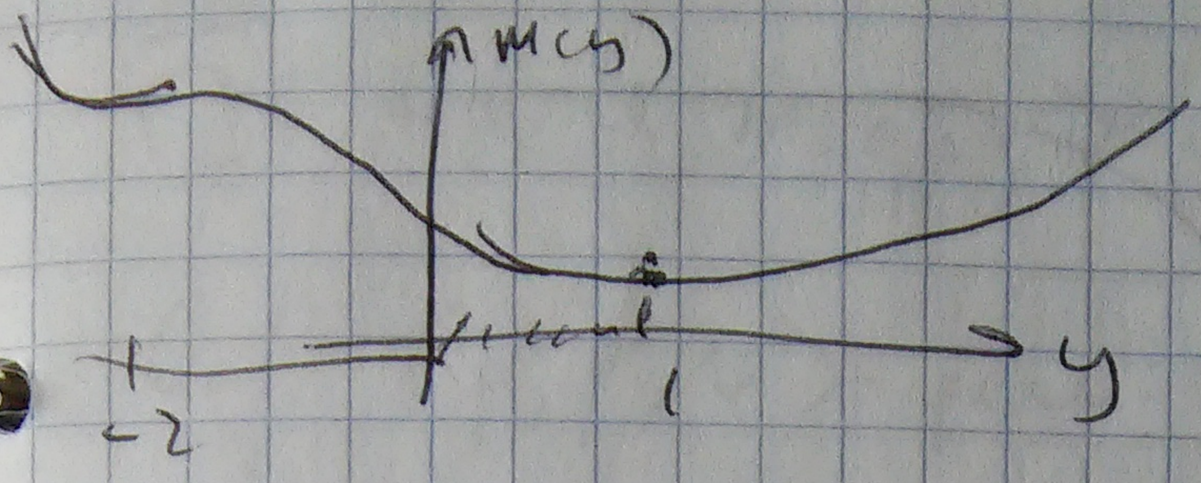
$M(y) = \max\limits_{x \in X} F(x(y)) = F(x(y), y) =$

$= -\frac{y^4}{4} + y^3 + \frac{y^4}{2} - 4y + 3$

$M'(y) = y^3 + 3y^2 - 4 \geq 0$.

$y_1 = 1$ → max.

$y_{2,3} = -2$. → т. перегиб



$y^0 = 1$ – минимакс. страт.

$(x(y^0), y^0) = (\frac{1}{2}; 1)$.

если x^0, $y(x^0)$, то это намного сложнее.

Опр. φ – смешанная стратегия, если она явл-ся вероятностным распр-ем. 16.02.15

Пример

1) $X = \{1, \dots, m\}$

$p = \{p_1, \dots, p_m\} \in P = \{p \mid \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ p_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}\}$.

выбираем i с вер. p_i.

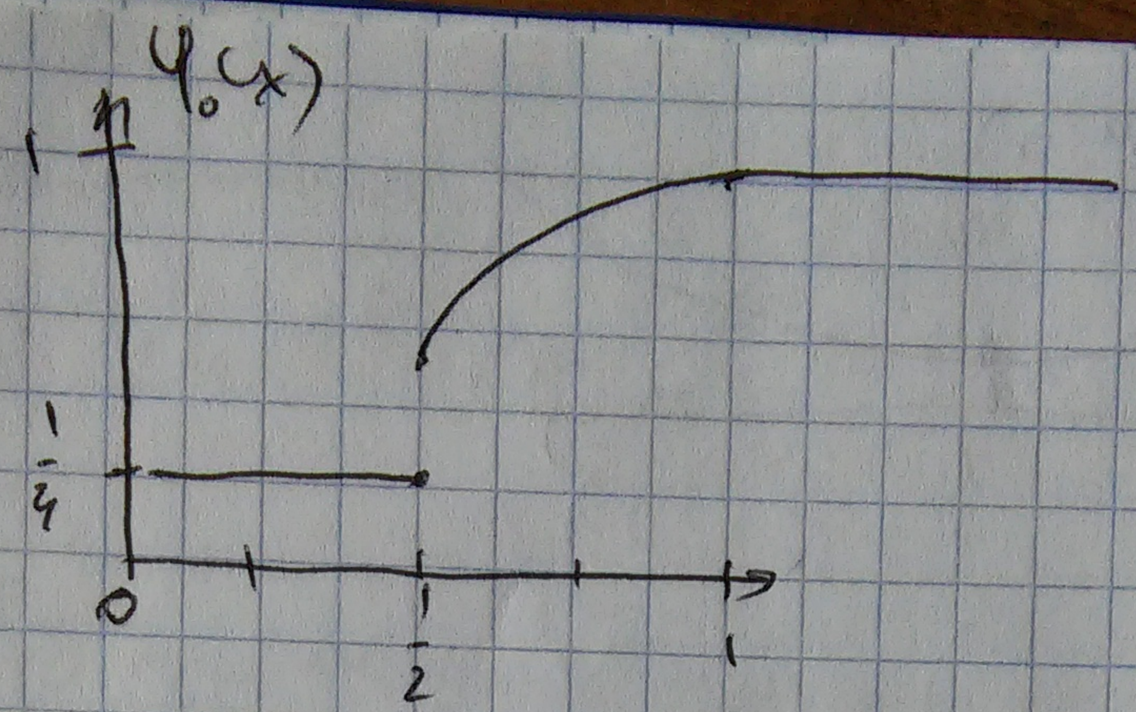
2) $X = [a, b]$.

$\varphi(x)$ – ф-я распр-я (не плотность)

$\varphi(x) = P(\xi \leq x)$.

$\varphi(x) = 0,\ x \leq a$, $\varphi(x) = 1,\ x \geq b$.

пример



$X \subset \{\varphi\}$

3) $\exists$ σ-бин. поле в E'.

$\exists$ φ-вероятностная мера ($\mu_{x_0}(x)$)

$x^0 \in X$

$$\mu_{x_0}(x) = \begin{cases} 1, & x \supset x_0 \\ 0, & x \notin x_0. \end{cases}$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} p_i \mu_{x^{(i)}}, \quad p \in P$$

$x^{(i)} \in X$.

$$\int_X h(x)\, dP(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i\, h(x^{(i)})$$

$\}$ $A = (c_{ij})_{m \times n}$:

$p \in P$ - σ-бин

$q \in Q$ - 2nd $\quad Q = \{q \mid \sum_{j=1}^{n} q_j = 1;\ q_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}\}$.

$A(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i c_{ij} q_j$.

$\overline{\Gamma}$: $\langle P, Q, A(p,q) \rangle$

Опр. $(p^0; q^0; v)$ - реш-е игры $\overline{\Gamma}$.

т.е. $(p^0; q^0)$ - СТ $A(p,q)$

v - значение игры в этой СТ: $A(p^0, q^0)$.

Теорема 1.4

Док-во:

нужно доказать, что $\exists$ СТ у $A(p,q)$ на $P \times Q$)

т.е. нужно проверить усл-е т. 1.3.

(#)

СТ: $A(p, q^0) \le A(p^0, q^0) \le A(p^0, q)$ $\forall p \in P$, $\forall q \in Q$

1) p^0

2) ?

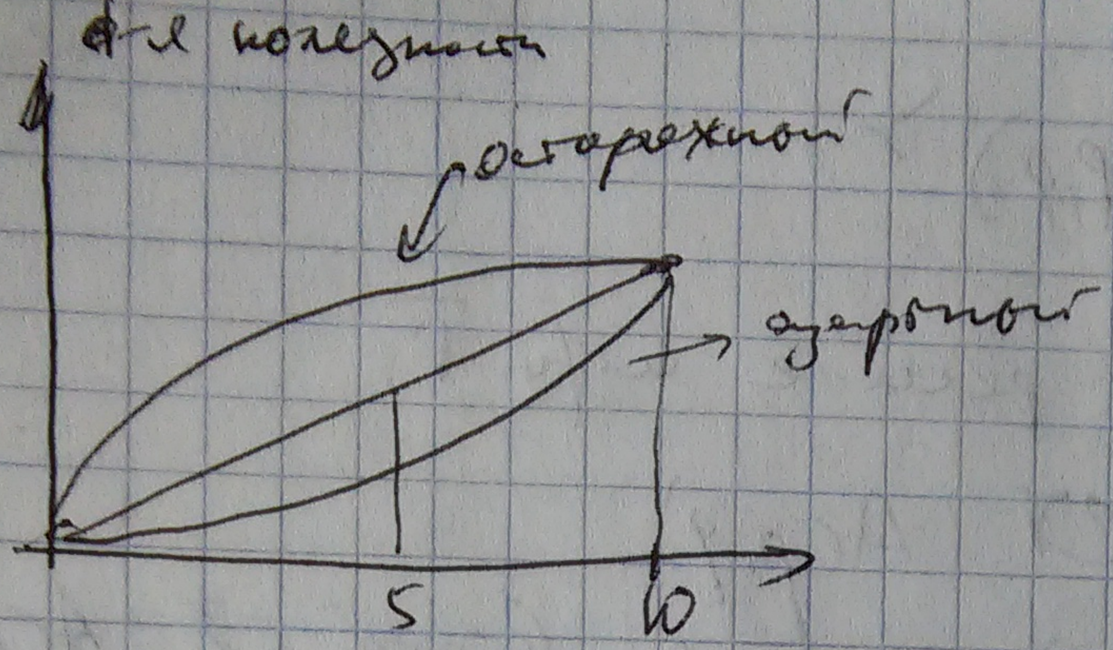
$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$10q + 0(1-q) \sim 5$

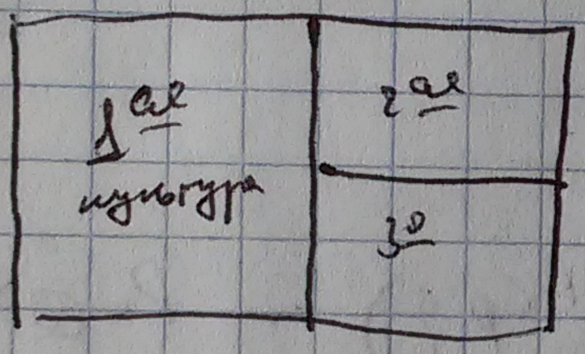
$q < \frac{1}{2}$ - азартный игрок

$q > \frac{1}{2}$ - осторожный игрок.



Задано $U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$.

Фермер



$H = (h_{ij})_{3\times 3}$

$A = (a_{ij})_{3\times 3}$

$3p^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle$.

$X = [a,b]$, $Y = [c,d]$, F непр. на $X \times Y$.

$\{\varphi\}, \{\psi\}$, $F(\varphi,\psi) = \int_a^b \int_c^d F(x,y)\, d\varphi(x)\, d\psi(y)$ ②

$F(x,\psi) = \int_c^d F(x,y)\, d\psi(y)$

① $\int_a^b F(x,\psi)\, d\varphi(x) = \int_c^d F(\varphi,y)\, d\psi(y)$.

$\bar{\Gamma} = \langle \{\varphi\}, \{\psi\}, F(\varphi,\psi) \rangle$.

~~(φ^0, ψ^0, v) рев-е $\bar{\Gamma}$.~~

$(\varphi^0; \psi^0, v)$ - рев-е $\bar{\Gamma}$. $(\varphi^0; \psi^0)$ - сф $F(\varphi, \psi)$.

Опр. $\{\varphi^k\} \xrightarrow{\text{Бэр}}$ слабо сх-ся к φ^0, если выполн-ся:
$\forall h(x)$ - непр. на $[a,b]$: $\lim\limits_{k\to\infty} \int_a^b h(x)\, d\varphi^k(x) = \int_a^b h(x)\, d\varphi^0(x)$.

Теорема Хелли

из-во равномерно ограниченных функций $\xrightarrow{\text{Бэр}}$ из него $\{\varphi\}$ для $[a,b]$ вып-ся слабым компактом (т.е. $\forall$ посл-ти можно выделить слаб сх-ся п/посл-ть).

Д-во.

Лемма 3

если Γ - непр. игра на п/у-ве, то в ней $\exists$ максимин. и минимакс. смеш. стр-ги.

Доказ-во

$\exists \underline{v} = \sup\limits_{\varphi\in\{\varphi\}} \inf\limits_{\psi\in\{\psi\}} F(\varphi,\psi)$.

$\bar{v} = \inf\limits_{\psi\in\{\psi\}} \sup\limits_{\varphi\in\{\varphi\}} F(\varphi,\psi)$

докажем $\exists$-е ε.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ such that $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in A$:

$$\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\| < \delta \Rightarrow |f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| < \varepsilon$$

Theorem 4

Let $f(x,y)$, $F(x,y)$ be $\mathcal{C}^1$ on $A \times [a,b]$.

Then $h(z) = \int_a^b f(x,y,z)\,dy$ is $\mathcal{C}^1$ on $[a,b]$ and

$$h'(z) = \int_a^b F(x,y,z)\,dy$$

Proof

Let $z_0 \in [a,b]$. Then $\forall z \in [a,b]$

$$h(z) - h(z_0) = \int_a^b f(x,y,z)\,dy - \int_a^b f(x,y,z_0)\,dy$$

$$= \int_a^b \left[f(x,y,z) - f(x,y,z_0) \right] dy$$

$$= \int_a^b F(x,y,\xi)(z - z_0)\,dy \quad \text{for some } \xi \text{ between } z \text{ and } z_0$$

$$= (z - z_0) \int_a^b F(x,y,\xi)\,dy$$

$$\Rightarrow \left| \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} - \int_a^b F(x,y,z_0)\,dy \right| = \left| \int_a^b F(x,y,\xi)\,dy - \int_a^b F(x,y,z_0)\,dy \right|$$

$$\leq \int_a^b |F(x,y,\xi) - F(x,y,z_0)|\,dy$$

$$< \varepsilon \quad \text{since } |\xi - z_0| < |z - z_0| < \delta$$

$$\Rightarrow h'(z_0) = \int_a^b F(x,y,z_0)\,dy$$

$$\Rightarrow h'(z) = \int_a^b F(x,y,z)\,dy$$

$\forall z \in [a,b]$

$\therefore h'(z) = \int_a^b F(x,y,z)\,dy$ on $[a,b]$

Theorem 5

Let $f(x,y)$ be continuous on $[a,b] \times [c,d]$.

Then $\int_c^d f(x,y)\,dy$ is continuous on $[a,b]$.

Proof

Let $x_0 \in [a,b]$. Then $\forall x \in [a,b]$

$$\int_c^d f(x,y)\,dy - \int_c^d f(x_0,y)\,dy = \int_c^d \left[f(x,y) - f(x_0,y) \right] dy$$

$$\leq \int_c^d |f(x,y) - f(x_0,y)|\,dy$$

$$< \varepsilon \quad \text{since } |x - x_0| < \delta$$

$$\Rightarrow \int_c^d f(x,y)\,dy \text{ is continuous at } x_0$$

$\therefore \int_c^d f(x,y)\,dy$ is continuous on $[a,b]$

$\Rightarrow$ $\dot{-}$ – sup

$h_1(z) - \varepsilon) \le h(z) \le (z) + h_1$ $\forall z \in \Omega$.

$\exists z \in Z$

$\Rightarrow$ $\inf_{z \in Z}$ $\le$ $\le \inf$ –.

$\forall x \in X$ $\overline{\inf_{y \in Y} F(x,y)}^{w(x)} - \overline{\inf_{y \in Y_1} F_1(x,y)}^{w_1(x)} | \le \varepsilon$ $\forall x \in X$.

$\overline{\sup_{x \in X} w(x)} - \overline{\sup_{x \in X} w_1(x)} | \le \varepsilon$

$\inf \bar{\tau}$ – аналогично

Теорема 1.5

$\forall$ непр. F на к/у-ке имеет рен-е в смеш. зад.

Док-во

$\bar{\Gamma}$ – док-ть

$\underline{\nu} = \max_{\varphi \in \Phi_F} \inf_{\psi \in \Psi_F} F(\varphi, \psi)$

$F(\varphi, \psi)$

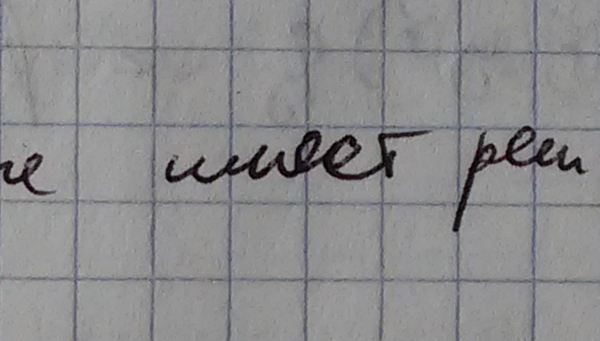
$\bar{\nu}$ – док-ть.

$\bar{\nu} = \min_{\psi \in \Psi_F} \sup_{\varphi \in \Phi_F} F(\varphi, \psi)$

док-ть)

$\underline{\nu} = \bar{\nu}$ (α).

$F(x,y)$, $X \times Y$.



$\varepsilon > 0$.

$X = \bigcup_{i=1}^{m} X^i$

$Y = \bigcup_{j=1}^{n} Y^j$



$(x^i, y^j) \subset X^i \times Y^j$

$F_1(x,y) = F(x^i, y^j)$, $(x,y) \in x^i \times y^j$.

$|F(x,y) - f_1(x,y)| \le \varepsilon \quad \forall (x,y) \in x \times y$. (1)

$A = \left((a_{ij}) = F(x^0, y^j) \right)$

$\forall \varphi \in \{\varphi\} \quad \varphi \to \rho \in \underline{P}$;

$p_i = \int_{x^i} d\varphi(x) = \underline{P}(x^i) \ge 0$.

$\forall p \in \underline{P} \quad \exists \varphi : \varphi \to p$.

$$F_1(\varphi, \psi) = \int_a^b \int_c^d F_1(x,y)\, d\varphi(x)\, d\psi(y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_i F(x^i, y^j) q_j = A(p,q) \quad (2)$$

~~$A(p,q)$~~

$\forall \varphi, \psi$

$$\left| F(\varphi, \psi) - F_1(\varphi, \psi) \right| = \left| \int_a^b \int_c^d \left(F(x,y) - f_1(x,y) \right) d\varphi(x)\, d\psi(y) \right| \le \varepsilon.$$

$\forall n.4 \quad \left| \max_{\varphi \in \{\varphi\}} \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) - \max_{p \in P} \max_{q \in Q} A(p,q) \right| \le \varepsilon.$

$\forall \left| \min_{\psi \in \{\psi\}} \sup_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi, \psi) - \min_{q \in Q} \max_{p \in P} A(p,q) \right| \le \varepsilon.$

$\Rightarrow |\underline{v} - \overline{v}| \le \varepsilon \cdot \varepsilon \Rightarrow \underline{v} = \overline{v}$.

§4. Св-ва реш-я в числ. обл.

Г. 1.6

(φ^0, ψ^0, v) реш-е $\overline{\Gamma}$ (*) — нест. не слуне

(*) вып-но: $F(x, \psi^0) \le v \le F(\varphi^0, y)$ $\forall x \in X$ $\forall y \in Y$ (*)

Доказ-во:

Необх: $\exists (\varphi^0, \psi^0, v)$ - реш-е $\overset{?}{\Rightarrow}$ (*).

$F(\varphi, \psi^0) \le F(\varphi^0, \psi^0) = v \le F(\varphi^0, \psi)$ $\forall \varphi, \psi$.

~~Ч.т.~~ ~~Ч.~~

Дост: $\forall \varphi$ $F(\varphi, \psi^0) \overset{\text{устрем}}{\le} v \overset{\text{устрем}}{\le} F(\varphi^0, \psi)$ $\forall \psi$.

$\varphi \to \varphi^0$ $\psi \to \psi^0$

$\Rightarrow v = F(\varphi^0, \psi^0)$.

Ч.

Теорема 1.7

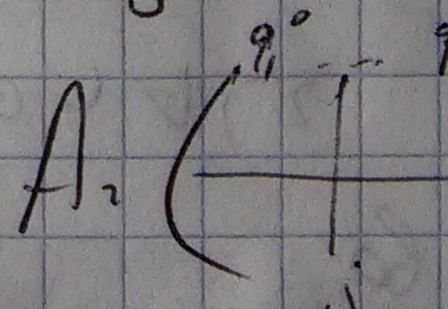
$A; (p^0, p^0, v)$ - реш-е (*)

$\Leftrightarrow$ $A(i, q^0) \le v \le A(p^0, j)$ $\forall \substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}$ (*).

Доказ-во:

$A(i, q^0) = \sum_{j=\overline{1,n}} a_{ij} q_j^0$

$A(p^0, j) = \sum_{i=\overline{1,m}} a_{ij} p_i^0$



Ч.

Примеры

1) $A_n = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_2 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$

Доказать, что $p^0 = q^0 = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$.

$v = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}$.

Верно. $A(p^0, q^0) = v = A(p^0, j)$ $\forall j$. $\Rightarrow$ ЧТД.

2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $p^0 = q^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $v = 0$.

3) $F(x,y) = (x-y)^2 = |x-y|^2$ $X = [0,1]$
$Y = [0,1]$

$\varphi(x) = x$
$\psi(y) = y$.

Теорема 1.8

Γ - непр. игра.

Тогда 1) $\forall \varphi \in \{\varphi\}$ $\inf\limits_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) = \min\limits_{y \in Y} F(\varphi, y)$
Т.е достижима на чистых стр.

2) $\forall \psi \in \{\psi\}$ $\sup\limits_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi, \psi) = \max\limits_{x \in X} F(x, \psi)$.

Док-во:

1) $\forall \varphi$ $\forall \psi \in \{\psi\}$

$F(\varphi, \psi) = \int F(\varphi, y)\, d\psi(y) \geq$

(2) $\min_{y\in Y} F(\varphi, y)$

$\Rightarrow \inf_{\psi\in\{\psi\}} F(\varphi,\psi) \geq \min_{y\in Y} f(\varphi, y) \geq \inf_{\psi\in\{\psi\}} F(\varphi,\psi)$ т.к. $Y\subset\{\psi\}$.

$\Rightarrow$ (=) (#)

Следствие

$\min$ нельзя в/уже $\sup$-во:

$\nu = \max_{\varphi\in\{\varphi\}} \min_{\psi\in\psi} F(\varphi, y) = \min_{\psi\in\{\psi\}} \max_{x\in X} F(x,\psi)$.

Доказ-во

$\nu = \max_{\varphi\in\{\varphi\}} \inf_{\psi\in\{\psi\}} F(\varphi,\psi) \overset{т.1.5}{=} \min_{\psi\in\{\psi\}} \sup_{\varphi\in\{\varphi\}} F(\varphi,\psi)$.

~~(#) т.1.5~~ $\Downarrow$ т.1.8. $\Downarrow$ т.1.8.

$\min$ $\max$

(#).

Теорема 1.8'

A.

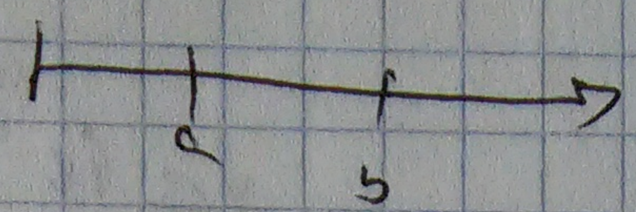
1) $\forall p\in P \quad \min_{q\in Q} A(p,q) = \min_{1\leq j\leq n} A(p,j)$ т.е. достаточно чистых стратегий.

2) $\forall q\in Q \quad \max_{p\in P} A(p,q) = \max_{1\leq i\leq m} A(i,q)$

Доказ-во: аналогично. (#).

Следствие: для A

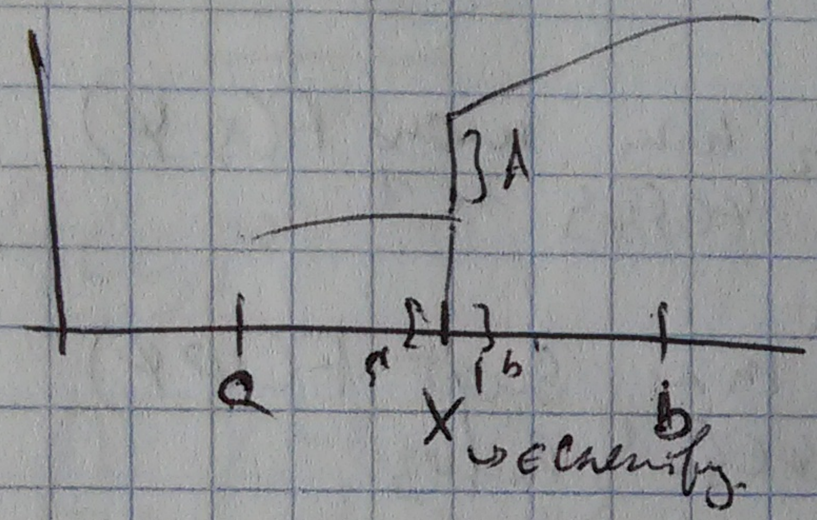
$\nu = \max_{p\in P} \min_{1\leq j\leq n} A(p,j) = \min_{q\in Q} \max_{1\leq i\leq m} A(i,q)$. (#).



Опр. $x \in [a,b]$, $x' \in \overset{\text{смотр}}{\mathcal{O}p}(\varphi)$ если $\forall \varepsilon > 0$

$\exists\, [a';b']$: $x' \in [a';b']$, $b'-a' \leqslant \varepsilon$:

$\varphi(b') - \varphi(a') > 0$. (т.е. вер-ть попасть в этот отрезок > 0)



$\varphi(b') - \varphi(a') > A$.

если $\varphi'(x') > 0$, то $x' \in$ окрестность.

Теорема 1.3

$\exists\, (\varphi^0, \psi^0, v)$ - реш-е Γ.

Тогда 1) $x \in \mathcal{O}p(\varphi^0) \Rightarrow F(x, \psi^0) = v$.

2) $y \in \mathcal{O}p(\psi^0) \Rightarrow F(\varphi^0, y) = v$.

Док-во:

1) (от): $\exists\, x' \in \mathcal{O}p(\varphi^0)$: $F(x', \psi^0) < v$.

$\exists\, [a', b']$: $x' \in [a', b']$.

$F(x, \psi^0) \leq v_1 < v$, $x \in [a', b']$.

$\varphi(b') - \varphi(a') > 0$.

$v = F(\varphi^0, \psi^0) = \int_a^b F(x, \psi^0)\, d\varphi(x)$ (2)

$\overset{\geq \varphi_1 < \nu}{\int_{[a',b']}} F(x,\varphi^0)\,d\varphi^0(x) +$

$\overset{(*)}{\leq \nu}$

$+ \int_{[a,b]\setminus[a',b']} F(x,\varphi^0)\,d\varphi^0(x) < \nu \int_{[0;5']} d\varphi^0(x) +$

$+\nu \int_{[a,b]\setminus[a';b']} d\varphi^0(x) = \nu \cdot 2 \Rightarrow ?!$ (#)

Следствие

$\exists (\varphi^0, \varphi^0, \nu)$ – реш-е Г.

Тогда 1) $F(x,\varphi^0) < \nu \Rightarrow x \notin Sp(\varphi^0)$

2) $F(\varphi^0, y) \geq \nu \Rightarrow y \notin Sp(\varphi^0)$.

Теорема 1.10

$\exists (p^0, q^0, \nu)$ – реш-е в смеш. стр. А.

Тогда 1) $p_i^0 > 0 \Rightarrow A(i, q^0) = \nu$ (*)

2) $q_j^0 > 0 \Rightarrow A(p^0, j) = \nu$.

(*) пояс. $A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$.

Следствие

$\exists (p^0, q^0, \nu)$ – реш-е.

Тогда 1) $A(i, q^0) < \nu \Rightarrow p_i^0 = 0$

2) $A(p^0, j) > \nu \Rightarrow q_j^0 = 0$.

$\exists A = \begin{pmatrix} q_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_n \end{pmatrix}$

q_i такие, где можно пренебречь погрешностями.

$0 < q_i < 1.$

$p_i^0 > 0, \; q_j^0 > 0 \; \forall i,j.$

$p_i^0 > 0 \Rightarrow A(i, q^0) = v, \; i = \overline{1,k},$

$q_i \quad q_i^0 = v_i, \; i = \overline{1,n}$

$q_i^0 = \frac{v}{q_i} \Rightarrow 1 = v \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k}.$

$v = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k}}$

$q_j^0 > 0.$

$A(p^0, j) = v$

$p_j^0 q_j = v, \; j = \overline{1,n}.$

$\left.\begin{array}{l} \text{противоречит } (*) \text{ и} \\ \text{конец } \ominus. \end{array}\right\}$

$\underline{v} \le \bar{v}.$

$= A(p_{(i)})$

$\forall = \max\limits_{p^0} \min\limits_{1 \le i \le n} q_{ij} p_{ij}$

§5. Методы решения матричных игр.

$A = (a_{ij})_{m \times n} \qquad (p^0, q^0, v)$

I) Доминирование стр и стб.

$A = \begin{pmatrix} \overline{\vee\ \vee\ \vee\ \vee\ \vee} \\ \times\ \times\ \times \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \times & \geq \\ \times & \geq \\ \times & \geq \\ \times & \geq \end{pmatrix}$

$a_i \geq b_i \Rightarrow a$ доминирует b

$> \Rightarrow a$ строго доминирует b

$a^{(i)}, i = \overline{1, m} \to \sum_{i=1}^{m} p_i a^{(i)}, p \in P$ → вып. комб.

Теорема 1.11 (доминирование стр)

$\exists$ некоторая стр матрицы A доминируется выпуклой комбинацией остальных стр A.

Тогда эта стр входит с нулевой вер-ю в нек. смеш. опт. страт. 1-го игрока.

Если строгое доминирование, то в $\forall$ страт.

Док-во.

$\exists\ i_1$.

$a_{i_1 j} \leq \sum_{i \neq i_1} p_i c_{ij}, j = \overline{1, n}, \sum_{i \neq i_1} p_i = 1, p_i \geq 0, i \neq i_1$ (1)

$\hat{A}$, $(\hat{p}, q^0, v)$ $\hat{A}$ → верно (*)

$\exists\ p^0 = \hat{p}$ с $0^{ой}$ компонентой по $i_1^{ом}$ месте.

$$A(p^0, j) = \hat{A}(\hat{p}, j) \overset{(*)}{\geq} 0$$

$\forall i \neq i_1$ $\quad A(i, q^0) = \hat{A}(i, q^0) \overset{(*)}{\geq} 0 \quad j = \overline{1,n}$

$i = i_1$ $\quad A(i, q^0) = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} q_j^0 \overset{(1)}{\leq} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \neq i_1} p_i q_{ij} q_j^0 =$

≥ 0

$$= \left[\sum p_i (p_i, i \neq i_1) \right] = \hat{A}(p^{i_1}, q^0) \leq 0$$

если сводное доминирование по всем элементам и $\Leftarrow$ сводное нер-во.

$A(i_1, q^0) < 0.$

$(p^*, q^0, v) \Rightarrow p_{i_1}^* > 0.$ $\quad v$

Теорема 1.12 (доминирование ск) оптимально (доминируем)

Пример (часть задания на к/р)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \geq \frac{1}{2} \\ \geq \frac{1}{2} \\ \geq 1 \\ \leq \end{matrix}$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \hat{p} = \hat{q} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$v = \frac{3+1}{2} = 2.$$

$$\Rightarrow p^0 = q^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \right)$$

II. Графический метод реш-я мат. игр 2×n, m×2.

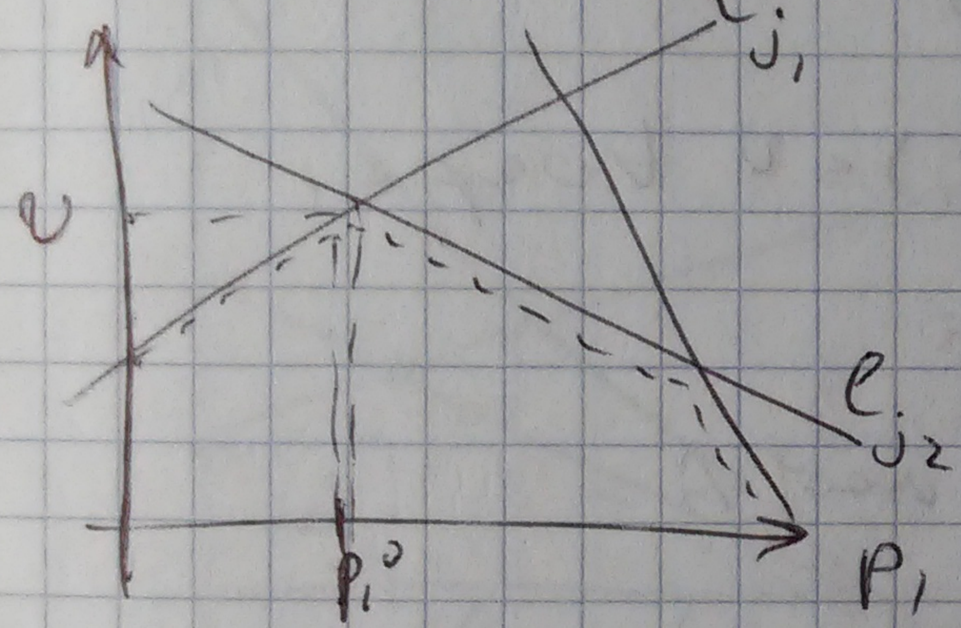
02.03.15

2×n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix} \begin{matrix} p_1 \\ 1-p_1 \end{matrix} \qquad p = (p_1, 1-p_1)$$

$$v = \max_{p \in P} \min_{1 \le j \le n} A(p, j) = \max_{0 \le p_1 \le 1} \min_{1 \le j \le n} \underbrace{[a_{1j} p_1 + a_{2j}(1-p_1)]}_{\ell_j(p_1)}$$

$$k_j = a_{1j} - a_{2j}$$



a) $0 < p_1^0 < 1$:

$\exists j_1 : k_{j_1} \ge 0, \quad \ell_{j_1}(p_1^0) = v$

$\exists j_2 : k_{j_2} \le 0$

$p^0 = (p_1^0, 1-p_1^0)$

$\ell_{j_2}(p_1^0) = v$

$k_{j_1} q^* + k_{j_2}(1-q^*) = 0 \quad (*)$

$\exists q^* \in [0;1]$

$q^0 = (0, \dots, 0, \underset{j_1}{q^*}, 0, \dots, (1-q^*), \underset{j_2}{0}, \dots, 0)$

$p = (p_1, 1-p_1)$: $A(p, q^0) = q^* \cdot A(p, j_1) + (1-q^*) A(p, j_2)^2$

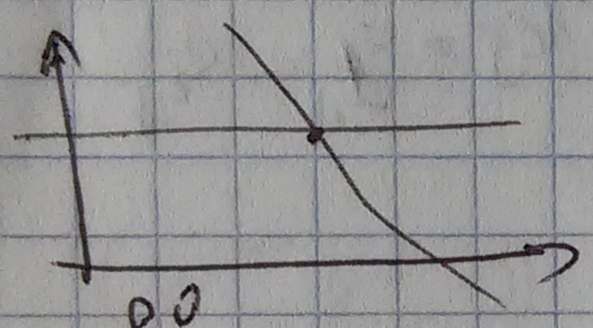
$= q^* \ell_{j_1}(p_1) + (1-q^*) \ell_{j_2}(p_1) \equiv v \quad \forall\, 0 \le p_1 \le 1$

$\Rightarrow q^0$ - опт. стр.
(выравнивающая)

б) $p_1^0 > 0 \Rightarrow$ чистая стр.

$\Leftrightarrow \exists j_1 : \ell_{j_1}(0) \ge v$
$\ell_{j_1}(p_1) \le v$

$\Leftrightarrow A(p, j_1) \le v \quad \forall\, 0 \le p_1 \le 1$



j_1 - опт. стр.

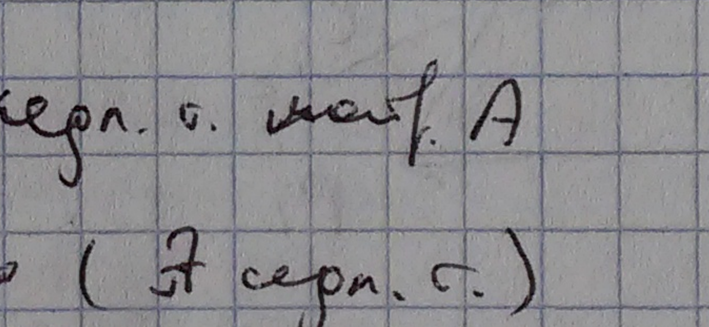
$\Leftarrow$

$(2, j_1)$ - седл. т. мат. A

в) $p_1^0 = 1 \rightarrow$ аналогично (2 седл. т.)

$m \times 2$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{i1} & a_{i2} \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}$ $\quad q = (q_1, 1-q_1)$, $0 \le q_1 \le 1$

$v = \min\limits_{1 \le q_1 \le 1} \max\limits_{1 \le i \le m} \ell_i(q_1)$



$\Leftarrow$

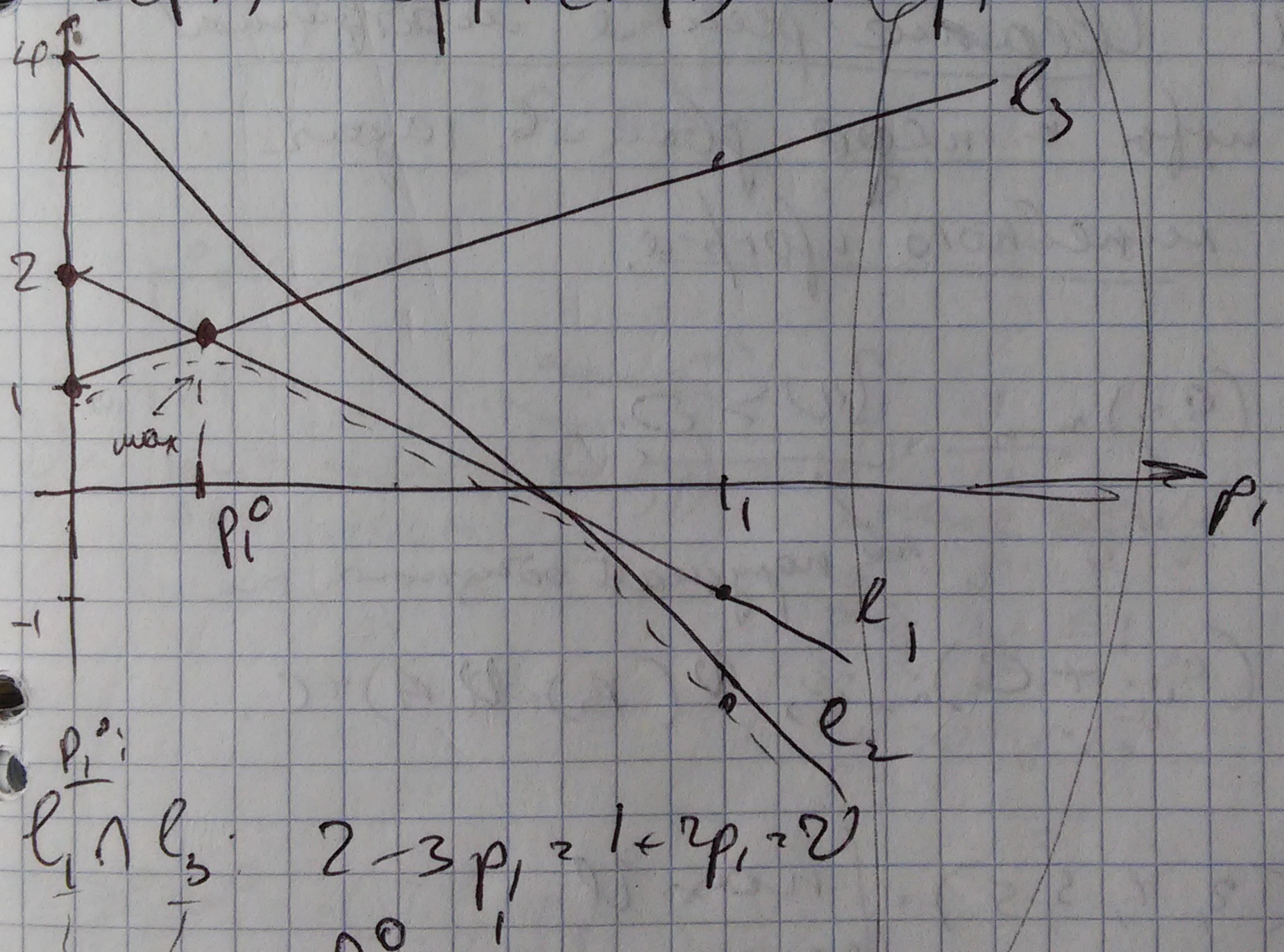
$p^* k_{i_1}^{>0} + (1-p^*) k_{i_2}^{>0} \ge 0$

$p_0 = (0, \dots, 0, \underset{i_1}{p^*}, \dots, \underset{i_2}{(1-p^*)}, 0, \dots, 0)$

Пример

$$A_2 \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 2/5 \\ 1/5 \\ 4/5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3/5 \\ . \\ . \end{matrix}$$

$$l_1(p_1) = -p_1 + 2(1-p_1) = 2-3p_1$$
$$l_2(p_1) = -2p_1 + 4(1-p_1) = 4-6p_1$$
$$l_3(p_1) = 3p_1 + (1-p_1) = 1+2p_1$$



p_1^0:

$l_1 \cap l_3$: $2-3p_1 = 1+2p_1 = 2$

$p_1^0 = \frac{1}{5}$

$v_2 \quad \frac{7}{5}$

$p^0 = (\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$

$q^0 = (q^* \quad 0 \quad 1-q^*)$

$(-3)\, q^* + 2(1-q^*) \geq 0.$

$q^* = \frac{2}{5}$.

$q^0 = (\frac{2}{5}, 0, \frac{3}{5})$

$A(P_1, J) \geq v \geq A(i, q^0)$ $\forall i, j$ (*) → обведено

$A(P_1, 2) = -\frac{2}{5} + \frac{16}{5} > v = \frac{2}{5} \to$ ИЛИ

«Ве сиб.

III. Сведение реш-я матричной игры к паре двойств. задач линейного прогр-я.

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ $\exists v > 0$.

не нарушает общности, т.к.

$\exists B = (a_{ij} + C)_{m \times n}$, $v(B) = v(A) + C$,

$\min(2, 4, 3, 5) = \begin{cases} \max u \\ u \leq 2 \\ u \leq 4 \\ u \leq 3 \\ u \leq 5 \end{cases}$

$v = \max_{P \in \Sigma} \min_{1 \leq j \leq n} A(P, j)$ (2)

~~← max~~

(=) $\max_{p \in P} u$:

$u \le A(p,j) = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{u} q_{ij}$, $j = \overline{1,n}$ (=)

(=) $\left[z_i = \frac{p_i}{u} \ge 0, \sum_{i=1}^{m} z_i = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i}{u} = \frac{1}{u} \right]$ (=)

$\left(u = \frac{1}{\sum z_i} \to \max \right)$ (=)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\min \sum_{i=1}^{m} z_i} \\ z_i \ge 0, \ i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} q_{ij} z_i \ge 1, \ j = \overline{1,n} \quad \text{(I)} \end{cases}$$

$p^0 \to \exists z^0$

$\exists$ c.r.l. β'

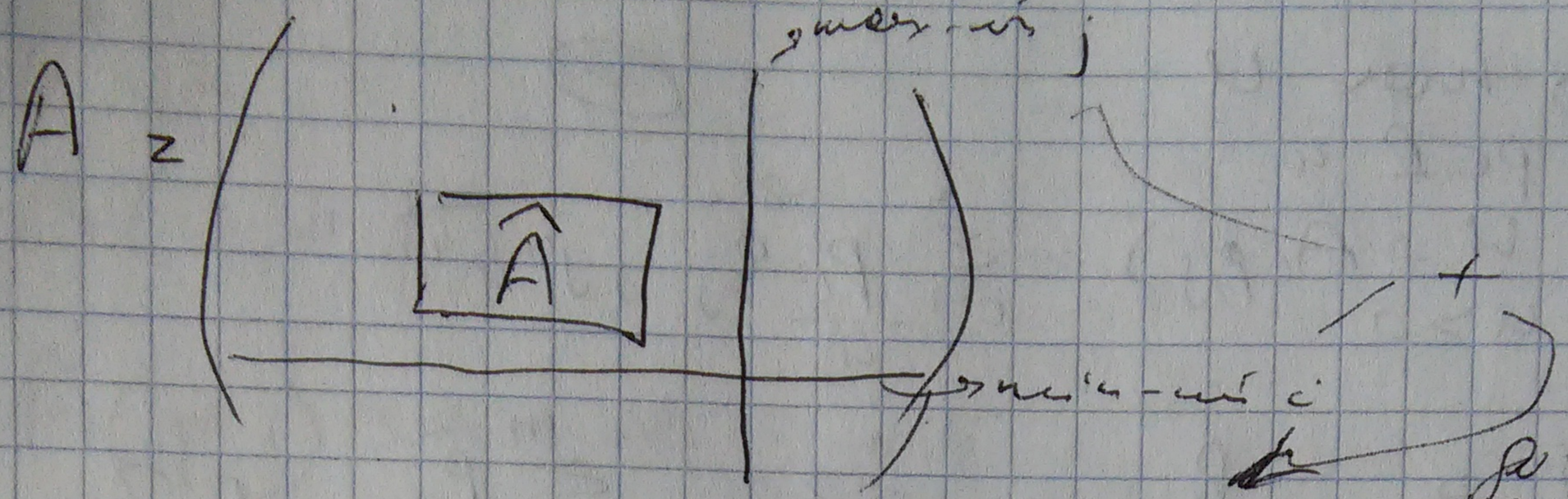
$\exists$ $\min_{q \in Q} \max_{1 \le i \le m}$ $A(i,q)$ — аналогично $\to \exists$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\max \sum_{j=1}^{n} w_j} \\ w_j \ge 0, \ j = \overline{1,n} \\ \sum_{j=1}^{n} q_{ij} w_j \le 1, \ i = \overline{1,m} \quad \text{(II)} \end{cases}$$

z^0, w^0 (I) (II)

$z_i^0 > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} q_{ij} w_j^0 = 1$

$z_i^0 w \Rightarrow \dots - u - < 1.$



$\min_{1\le j\le n} A(i^\circ, j) \le \nu \le \max_{1\le i\le m} A(i, j^\circ)$

(если A - седловая).

§6. Игры с выпуклой или вогнутой ф-ей выигрыша.

$\Gamma_2 = \langle X, Y, F(x,y) \rangle$

$\Rightarrow$ понят. седлов. т. в.

Опр. $\exists F$ непр. на $X \times Y$.

$\forall x\ F \cup_y$

$\forall y\ F \cup_x$

тогда Γ - игра с вып. ф-ей выигрыша

(**вып.**, если $\cap_x, \cap_y$).

$F(x,y) = xy$.

$\exists$ 2-вып. в седлов т-ве.

Опр $z^0 \in Z$ - крайняя точка Z, если
$\nexists z^1 \neq z^2 \in Z; \nexists \lambda \in (0,1)$:
$z^0 = \lambda z^1 + (1-\lambda) z^2$.

$\exists z^{ex+}$ - мн-во крайних точек мн-ва Z.

Теорема 1.13 (Каратеодори)
$\exists Z \subset E^m$.
Тогда $\forall z^0 \in Z$
$\exists z^{(1)}, \dots, z^{(m+1)} \in Z^{ex+}, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_{m+1} \geq 0: \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1$:
$z^0 = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i z^{(i)}$.

Лемма 5.
$\exists f(z)$ непр. на вып. огран. замкн. мн-ве $Z \subset E^n$.
Тогда $\max_{z \in Z} f(z) = \max_{z \in Z^{ex+}} f(z)$.

Док-во:
$\exists z^0 : f(z^0) = \max_{z \in Z} f(z)$
Пусть $z^0 \exists z^{(1)}, \dots, z^{(m+1)} \in Z^{ex+}, \lambda_1, \dots, \lambda_{m+1} \geq 0; \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1$:
$z^0 = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i z^{(i)}$
$f(z^0) = f\left(\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i z^{(i)}\right) \leq \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i f(z^{(i)}) \leq \max_{i=1,\dots,m+1} f(z^{(i)})$ ⊛

$X^{ext} = \{x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\}$

$\Omega = \{p \in E^k \mid \sum_{i=1}^{k} p_i = 1,\ p_i \geq 0,\ i = \overline{1,k}\}$

Ф-ия $\Phi(p, y) = \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot F(x^{(i)}, y) =$

$= \int F(x, y)\, d\varphi(x)$

X

$\varphi = \sum_{i=1}^{k} p_i\, y_{x^{(i)}}$

7.1.3; 2) $\Phi(p, y)$ имеет седл. точку на $\Omega \times Y$.

$$v = \min_{y \in Y} \max_{p \in \Omega} \Phi(p, y) \overset{п.5}{=} \min_{y \in Y} \max_{1 \leq i \leq k} F(x^{(i)}, y) =$$

$$\overset{п.5}{=} \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y)$$

Т.1.14

Зв Γ $X^{conc} = \{x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\}$.

Тогда $\exists$ реш-е: $(\varphi^0, y^0, \bar{v})$, где

$\bar{v} = \bar{v} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y)$,

y^0 – минимаксная стратегия.

$\varphi^0 = \sum_{i=1}^{k} p_i^0\, y_{x^{(i)}}$

Доказ-во

по усл. проверим усл-е (*):

$$\min_{y\in Y} F(\varphi^0, y) = \min_{y\in Y} \Phi(p^0, y) = \Phi(p^0, y^0) =$$

$$= \max_{p\in P} \Phi(p, y^0) = \max_{x\in X} F(x, y^0).$$

$$F(\varphi^0, y) \geq \bar{v} \geq F(x, y^0) \quad \forall x\in X \quad (*).$$
$$\forall y\in Y$$

(**)

$\exists \Gamma : \cap_x \cap_Y, \; Y^{ext} = \{y^{(1)}, \dots, y^{(M)}\}$

$$Q = \{q \in E^M \mid \sum_{j=1}^{M} q_j = 1, \; q_j \geq 0, \; j = \overline{1, M}\}$$

$$\Phi_1(x, q) = \sum_{j=1}^{M} F(x, y^j) q_j, \quad \forall x\times Q.$$

Теорема 1.15

$\exists \Gamma \; y^{ext} = \{y^{(1)}, \dots, y^{(M)}\}$.

Тогда $\exists (x^0, \varphi^0, \bar{v})$, где

$\bar{v} = v = \max_{x\in X} \min_{y\in Y} F(x, y)$

x^0 – максимин. стр.

$$\varphi^0 = \sum_{j=1}^{M} q_j^0 \, \delta_{y^{(j)}}$$

Пример

$F(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2, \quad X = [0, 1]$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad Y = [0, 1]$

U_x, V_y.

U_2 $\overline{v} = \min\limits_{0\le y\le 1} \max\limits_{0\le x\le 1} F(x,y) = \frac{4}{9}$,

$y^0 = \frac{2}{3}$. $\Rightarrow$ ~~ручное~~ решение (?)

$X^{ext} = \{0;1\}$

$\varphi = p_1 y_0 + (1-p_0) y_1$

$F(\varphi, y) = \Phi(p_1, y) = p_1 F(0,y) + (1-p_1) F(1,y) = \dots =$

$= y^2 + (1-p_1)(2-3y)$, $y_0 = \frac{2}{3}$.

$p^0 = (p_1^0, 1-p_1^0)$

$\Phi_y'(p_1^0, y^0) \sim 0 \to p_1^0$.

$\Phi_y'(p_1^0, y^0) = 2y^0 - 3(1-p_1^0) = \frac{4}{3} - 3(1-p_1^0) = 0$

$p_1^0 = \frac{5}{9}$.

$\Rightarrow \varphi^0 = \frac{5}{9} y_0 + \frac{4}{9} y_1$

§7. Исследование игровых моделей.

"Иск" "нападение" - "защита" без. движения.

$A > 0$ - кол-во сфер нападения.

x — стратегии поведения

$$X = (x_1, \dots, x_n) \in X = \{x \in E^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = A,\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}\}$$

1 2 ... n

$B > 0$ → Чередование ходов.

$$y = (y_1, \dots, y_n) \in Y = \{y \in E^n \mid \sum_{i=1}^{n} y_i = B,\ y_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}\}$$

$\mu_i > 0$ x_i y_j

если $x_i > \mu_i y_i$, то $x_i - \mu_i y_i$ израсходуется.
будет участвовать в дальнейшем

если $x_i \leq \mu_i y_i$, то никто не израсходует.

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \max[x_i - \mu_i y_i; 0].$$

} все что израсходуется.

} $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n > 0.$

а) $\underline{v} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x,y) =$

$= \max[A - \mu_n B, 0]$

} решение.

~~x^0~~ x^0, $x^{(n)}$, $(0, \dots, 0, A)$

$\forall x \in X \Rightarrow y(x)$

$\exists i_0$: $\sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{x_i}{\mu_i} \leq B \leq \sum_{i=1}^{i_0} \frac{x_i}{\mu_i}$

$$y_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x_i}{\nu_i}, & i = \overline{1, i_0 - 1} \\ B - \sum\limits_{i=1}^{i_0-1} \dfrac{x_i}{\nu_i}, & i = i_0 \\ 0, & i > i_0. \end{cases}$$

$$\min_{y \in Y} F(x, y) \le F(x, y(x)) =$$

$$= \sum x_{i_0} - \nu_{i_0} \left(B - \sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{x_i}{\nu_i} \right) +$$

$$+ \sum_{i=i_0+1}^{n} x_i = \sum_{i=i_0}^{n} x_i + \nu_{i_0} \sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{x_i}{\nu_i} - \nu_{i_0} B \le$$

$$\le A - \nu_{i_0} B \le A - \nu_n B \le \max [A - \nu_n B, 0] =$$

$$= \max_{y \in Y} f(x^{(n)}, y) = \underline{v}.$$

$\blacksquare$

б) $\bar{v} = \min\limits_{y \in Y} \max\limits_{x \in X} F(x, y) =$

$$= \max \left[A - \frac{B}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\nu_k}}, 0 \right]$$

$$y^0: \quad y_i^0 = \frac{B}{\nu_i \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\nu_k}}$$

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\max [x_i - \nu_i y_i, 0]}_{\text{вып.}}$$

$x^{экст}$: $\quad x^{(i)} = (0, \dots, A^{i}, 0, \dots, 0)$

$\sum_{i=1}^{n} x_i \le A, \quad x_i \ge 0.$

$$\max_{x \in X} f(x,y) = \max_{1 \le i \le n} f(x^{(i)}, y) \quad (1)$$

$$\bar{v} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x,y) \overset{(1)}{=} \min_{y \in Y} \max_{1 \le i \le n} f(x^{(i)}, y) =$$

$$= \min_{y \in Y} \max_{1 \le i \le n} [A - y_i, y_i, 0] =$$

$$= \min_{y \in Y} \max [A - \min_{1 \le i \le n} y_i, y_i, 0] =$$

$$= \max [A - B \cdot \max_{y \in Y} \min_{1 \le i \le n} y_i \frac{y_i}{B}, 0] =$$

$$= \left[p_i = \frac{y_i}{B} \ge 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right] =$$

$$= \max [A - B \max_{p \in P} \min_{1 \le i \le n} y_i p_i, 0] \quad (2)$$

вычисляем в §4

$$v = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}$$

(2) $\max [A - B \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, 0]$ (3)

$A \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k} \le B.$

(3) $\bar{v} = 0. \quad \Rightarrow \quad 0 = \bar{v} \ge \underline{v} \ge 0.$

$\Rightarrow$ есть сверху 0 тоже.

$$\bar{v} = A - \frac{B}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}} \geq A - \frac{B}{\frac{1}{\mu_n}} = A - \mu_n B$$

$\bar{v} \geq 0 \quad \bar{v} \geq \max[A - \mu_n B, 0] = \bar{v} \Rightarrow$ мес ст.

$\Rightarrow$ рек. к точно в седловой точ.

$$\Rightarrow \bar{v} = A - \frac{B}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}} = \bar{v}.$$

$$\varphi^0 = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \delta_{x^{(i)}}$$

$$p_i^0 = \frac{\frac{1}{\mu_i}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, \quad i = \overline{1, n}.$$

$$\forall y \in Y \qquad F(\varphi^0, y) \geq \bar{v} = v.$$

$$F(\varphi^0, y) = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 F(x^{(i)}, y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \max[A - \mu_i q_{y_i}, 0] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \max[\underbrace{A p_i^0}_{a_i} - \underbrace{p_i^0 \mu_i q_{y_i}}_{b_i}, 0] \geq$$

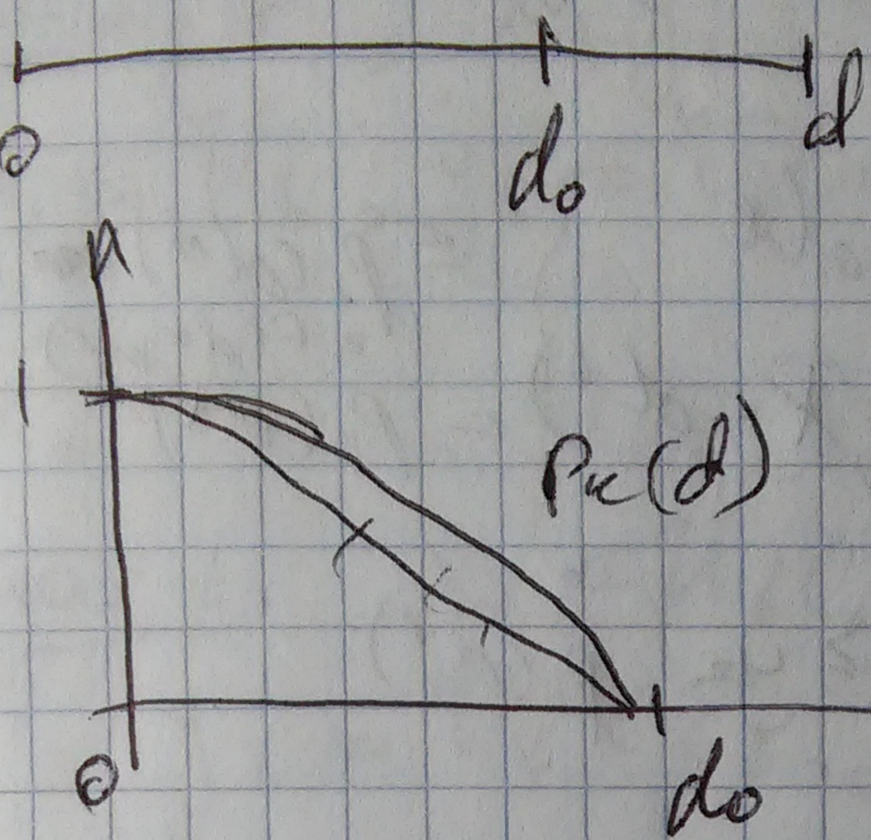
$$\geq \left[\sum_{i=1}^{n} \max[a_i, b_i] \geq \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i=1}^{n} b_i \right\} \right] \geq$$

$$\geq \max\left[A - \frac{\sum y_i \leq B}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, 0\right] = \max\left[A - \frac{B}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, 0\right]$$

$\Rightarrow$ верно.

#

Модель дуэли



$P_к(d)$ – вер-ть поражения с расстояния d.

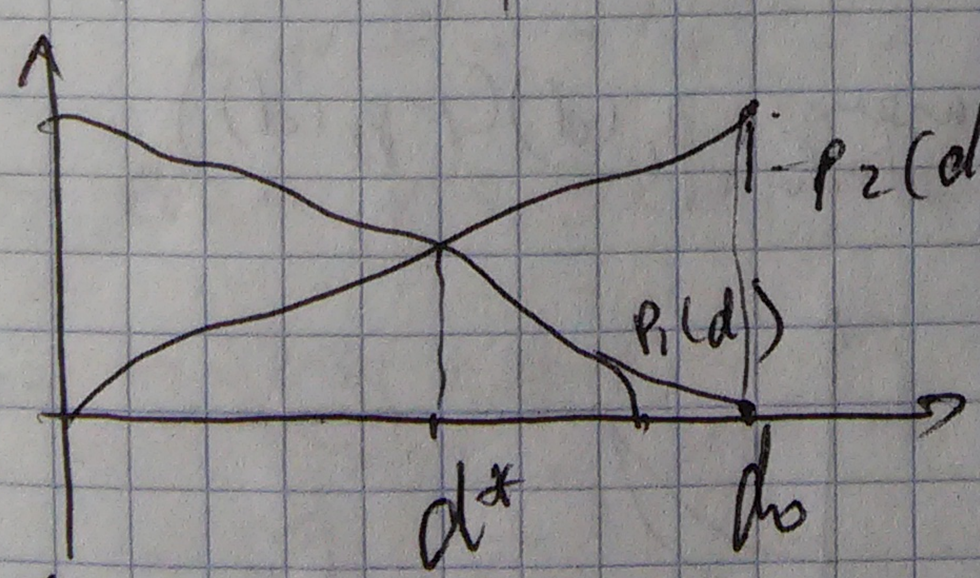
$P_к(0) = 1$

$P_к(d_0) = 0$.

$\kappa = 1/2$.

$x \in X = [0, d_0]$. , $y \in Y = [0, d_0]$.

$$F(x,y) = \begin{cases} P_1(x), & x \geq y \\ \underbrace{1 - P_2(y)}_{\text{вер-ть, что 2-ой промахнется}}, & x < y. \end{cases}$$



d^* : $P_1(d) = 1 - P_2(d)$

$S(d^*, d^*, v_1 p_1(d^*))$.

~~противн~~ если противник хорош - надо обеспечить ранний

~~доказ~~ докажем 2.:

$$F(x, d^*) = \begin{cases} p_1(x), & x \geq d^* \\ 1 - p_2(d^*), & x < d^* \end{cases} \leq p_1(d^*) \cdot 2 = p_2 F(d^*, d^*) = p_1(d^*)$$

$\forall y \in Y$

$$F(d^*, y) = \begin{cases} p_1(d^*), & d^* \geq y \\ 1 - p_2(d^*), & d^* < y \end{cases} \geq p_1(d^*)$$

$$F(x, d^*) \leq F(d^*, d^*) = p_1(d^*) \leq F(d^*, y).$$

если бездушная функция, то

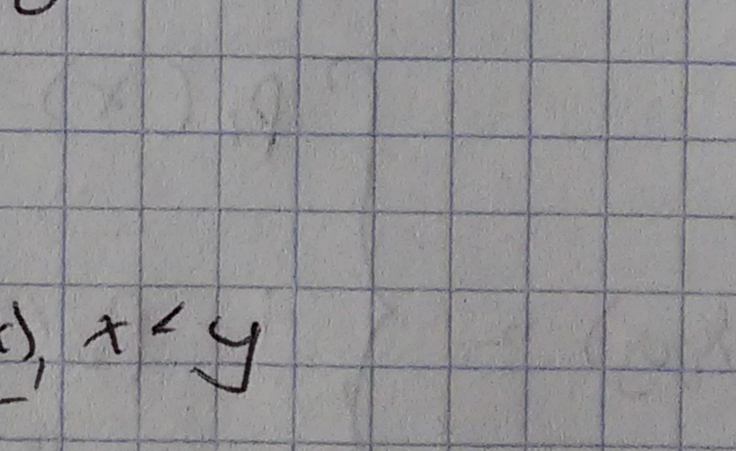
$$F(x, y) = \begin{cases} p_1(x), & x \geq y \\ (1 - p_2(y)) p_1(x), & x < y \end{cases}$$

нет реш-я в чистых обратных.

$$\underline{v} = \max_{0 \leq x \leq d_0} \inf_{y \in Y} F(x, y) = \max_{0 \leq d \leq d_0} p_1(d)(1 - p_2(d))$$

реш-е в смеш. стр-ях:

$\exists d_0 = 1$, $p_1(d) = p_2(d) = 1 - d$.



§8. Многоходовые игры с полной информацией

16.03.15

$t = \overline{1,T}$, x_t, y_t – альтернативы.

ход 1: $x_1 \in U_1$, $y_1 \in V_1(x_1) \triangleq V_1(\cdot)$

$\bar{x}_t \triangleq (x_1, \dots, x_t)$, $\bar{y}_t = (y_1, \dots, y_t)$

ход t: $x_t \in U_t(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1}) \triangleq U_t(\cdot)$

$y_t \in V_t(\bar{x}_t, \bar{y}_{t-1}) \triangleq V_t(\cdot)$

$(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$ – партия.

$F(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$ – выигрыш 1го игрока

игра ним?

n спичек

ходят дети 1 или 2 штуки.

кто достал последнюю – тот проиграл.

$\exists\, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

$-, +, +, -, ?, +, -, +, +, -$

$\Rightarrow$ если $n = 3k+1$, то 1ый проиграет.

$\exists\, n = 23 (\neq 3k+1)$

$\to 22 \to$ берет так, чтобы осталось $3k+1 \to \dots \to$ (4).

$x_t = \tilde{x}_t(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1})$

$\exists\ \tilde{\mathcal{U}}_t \Rightarrow \tilde{x}_t$

$\tilde{\tilde{x}} = (\tilde{x}_t,\ t=\overline{1,T}) \in \tilde{\tilde{X}} = \times_{t=1}^{T} \tilde{\mathcal{U}}_t$

$y_t = \tilde{\varphi}_t(\bar{x}_t, \bar{y}_{t-1})$

$\exists\ \tilde{\mathcal{V}}_t \Rightarrow \tilde{y}_t$

$\tilde{\tilde{y}} = (\tilde{y}_t,\ t=\overline{1,T}) \in \tilde{\tilde{Y}} = \times_{t=1}^{T} \tilde{\mathcal{V}}_t.$

$F(\tilde{x}, \tilde{y})$ - отображение.

$(\tilde{x}, \tilde{y}) \longrightarrow (\bar{x}_T, \bar{y}_T)$

$x_1 = \tilde{x}_1,\ y_1 = \tilde{y}_1(x_1)$

$x_2 = \tilde{x}_2(x_1, y_1)$ и т.д.

$F(\tilde{x}, \tilde{y}) = F(\bar{x}_T, \bar{y}_T).$

$\Gamma = \langle \tilde{X}, \tilde{Y}, F(\tilde{x}, \tilde{y}) \rangle.$

Вариации:

1) Γ^1: $\forall\ \mathcal{U}_t(\cdot), \mathcal{V}_t(\cdot)$ - конечно.

2) Γ^{II}: $\mathcal{U}_t(\cdot) \equiv \mathcal{U}_t$ (т.к. $= const$) - конечно метрич. пр-во

$\mathcal{V}_t(\cdot) \equiv \mathcal{V}_t$ - — " — —

$F(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$ - непр. на $(\times_{t=1}^{T} \mathcal{U}_t) \times (\times_{t=1}^{T} \mathcal{V}_t)$.

Метод динамич. прогр-я:

$\tilde{x}^0 = (\tilde{x}_t^0, t=\overline{1,T})$, $\tilde{y}^0 = (\tilde{y}_t^0, t=\overline{1,T})$ - искомые оптимальные

найдём с конца:

$\tilde{y}_T^0 : y_T^0 = \tilde{y}_T^0(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}) : F(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}, y_T^0) =$

$= \min_{y_T \in V_T(\cdot)} F(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}, y_T) \triangleq F(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$.

ф-я Беллмана.

$\tilde{x}_T^0 : x_T^0 = \tilde{x}_T^0(\bar{x}_{T-1}, \bar{y}_{T-1}) : F(\bar{x}_{T-1}, x_T^0, \bar{y}_{T-1}) =$

$= \max_{x_T \in U_t(\cdot)} F(\bar{x}_{T-1}, x_T, \bar{y}_{T-1}) \triangleq F(\bar{x}_{T-1}, \bar{y}_{T-1})$.

$\tilde{y}_T^0, \tilde{x}_T^0, \ldots, \tilde{y}_{t+1}^0, \tilde{x}_{t+1}^0$

$\tilde{y}_t^0, \tilde{x}_t^0 - ?$ аналогично ↑.

в Γ' и Γ'' все max и min достигаются $\Rightarrow$ всё ок

$\tilde{v} = \max_{x \in U_1} F(x_1) = \max_{x_1 \in U_1} \min_{y_1 \in V_1(x_1)} F(x_1, y_1) =$

$= \ldots = \max_{x_1 \in U_1} \min_{y_1 \in V_1(\cdot)} \ldots \max_{x_T \in U_T(\cdot)} \min_{y_T \in V_T(\cdot)} F(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$.

Теорема 16 (Черепко!)

$\forall \Gamma'$ (или Γ'') имеет рен-е вида:

$(\hat{x}^0, \hat{y}, \hat{v})$, где $\hat{x}^0, \hat{y}, \hat{v}$ определены выше.

Док-во:

$F(\hat{x}, \hat{y}) : \hat{X} \times \hat{Y}$.

Хотим док-ть:

1) $\forall \hat{y} \in \hat{Y}$, $F(\hat{x}^0, \hat{y}) \geq \hat{v}$

2) $\forall \hat{x} \in \hat{X}$, $F(\hat{x}, \hat{y}^0) \leq \hat{v}$.

докажем 1), т.к. 2) - аналогично.

Берем $\forall \hat{y} \in \hat{Y}$.

$$F(\hat{x}^0, \hat{y}) = F(\hat{x}^0, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{T-1}, \hat{y}_T) \geq$$

$$\geq \min_{y_T \in V_T(\cdot)} f(\hat{x}^0, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{T-1}, y_T)$$ ограничения функции Беллмана

$$= F(\hat{x}^0, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{T-1}) \geq$$

$$\geq F(\hat{x}_1^0, \dots, \hat{x}_{T-1}^0, \hat{x}_T^0, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{T-1}) =$$ по опр.

$$\geq \max_{x_T \in U_T(\cdot)} F(\hat{x}_1^0, \dots, \hat{x}_{T-1}^0, x_T, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{T-1}) \geq$$

$$\geq F(\hat{x}_1^0, \dots, \hat{x}_{T-1}^0, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{T-1}) \geq \dots \geq$$

$$\geq F(\hat{x}_1^0, \hat{y}_1) \geq \min_{y_1 \in V_1(\cdot)} F(\hat{x}_1^0, y_1)$$ Ф-ла Бел. $=$

$$= F(\hat{x}_1^0) = \max_{x_1 \in U_1(\cdot)} f(x_1) = \hat{v}. \quad \#$$

Пример 1

1) Шахматы:

число ходов $\le T$.

$U_t(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1})$ - ин-во разрешимых ходов до 1-го.

$W_t(\bar{x}_t, \bar{y}_{t-1})$ - -"-.

↑ полезно

$\Rightarrow \Gamma'$

$$F(\bar{x}_T, \bar{y}_T) = \begin{cases} 1, & \text{белые выиг.} \\ 0, & \text{-"- проиг.} \\ \frac{1}{2}, & \text{ничья.} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ по т. игра "шахматы" имеет реш-е.

$\tilde{v} = \frac{1}{2}$.

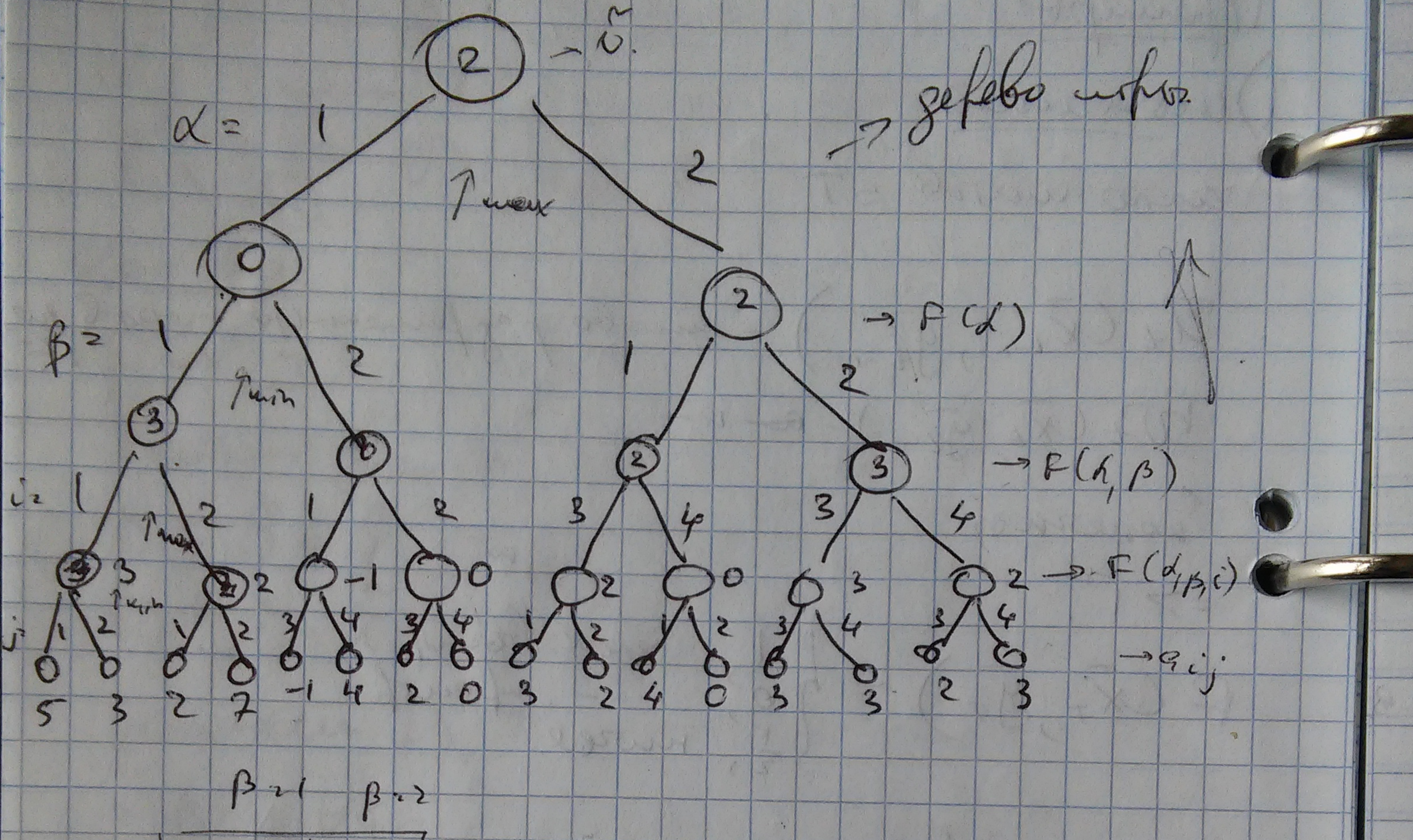
2) $A_2 \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$M_1 = \{1,2\}$, $M_2 = \{3,4\}$: M_α, $\alpha = 1,2$.

$N_1 = \{1,2\}$, $N_2 = \{3,4\}$: N_β, $\beta = 1,2$.

1) α, β

2) $i \in M_\alpha$, $j \in N_\beta$.



		β=1		β=2	
α=1		5	3	-1	4
		2	7	2	0
α=2		3	2	3	3
		4	0	2	3

$$f(\alpha, \beta, i, j) = a_{ij},$$

$$f(\alpha, \beta, i) = \min_{j \in \omega_\beta} a_{ij}$$

$$f(\alpha, \beta) = \max_{i \in A_\alpha} f(\alpha, \beta, i)$$

$$F(\alpha) = \min_{\beta \in \{1,2\}} f(\alpha, \beta)$$

$$\tilde{v} = \max_{\alpha \in \{1,2\}} F(\alpha) = \xi(\alpha^0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{v} = 2}$$

$\alpha^0 = 2$.

$\tilde{i}^0(\alpha, \beta)$: $\alpha^0 = 2$ → сигнатура только $\alpha = 2$.

$\tilde{i}^0(2, \beta)$:

$\tilde{i}^0(2,1) = 3$

$\tilde{i}^0(2,2) = 3; 4$ → т.к. β-состояние — только 3-мерное.

(т.к. $\beta = 2$) → 2 сост. стрел.

$\tilde{\beta}^0(\alpha)$: $\alpha = 2$, т.к. $2^{\text{ой}}$ не имел бы решений $1^{\text{го}}$.

$\tilde{\beta}^0(1) = 2$

$\tilde{\beta}^0(2) = 1$.

$\tilde{j}^0(\alpha, \beta, i)$: (число подсказок)

$\tilde{j}^0(1, 2, i)$ → $i \in M_1$

$i = 1$ → $\tilde{j}^0(1,2,1) = 3$

$i = 2$ → $\tilde{j}^0(1,2,2) = 3, 4$ (т.к. подходят $\forall i \geq 2$)

$\tilde{j}^0(2, 1, i)$ → $i \in M_2$

$i = 3$ → $\tilde{j}^0(2,1,3) = 2$

$i = 4$ → $\tilde{j}^0(2,1,4) = 2$. → 2 сост. стрел.

$F(x,y) = (x-y)^2$, $x, y \in [0,1]$.

Глава 2. Неантагонистические игры.

§3. Ситуации равновесия в играх многих лиц.

$x \in X$, $y \in Y$, $F(x,y) : X \times Y$, $G(x,y) : X \times Y$ → игрок 1го, → игрок 2го.

$\Gamma_2 = \langle X, Y, F(x,y), G(x,y) \rangle$.

$(x,y) \in X \times Y$ - ситуация

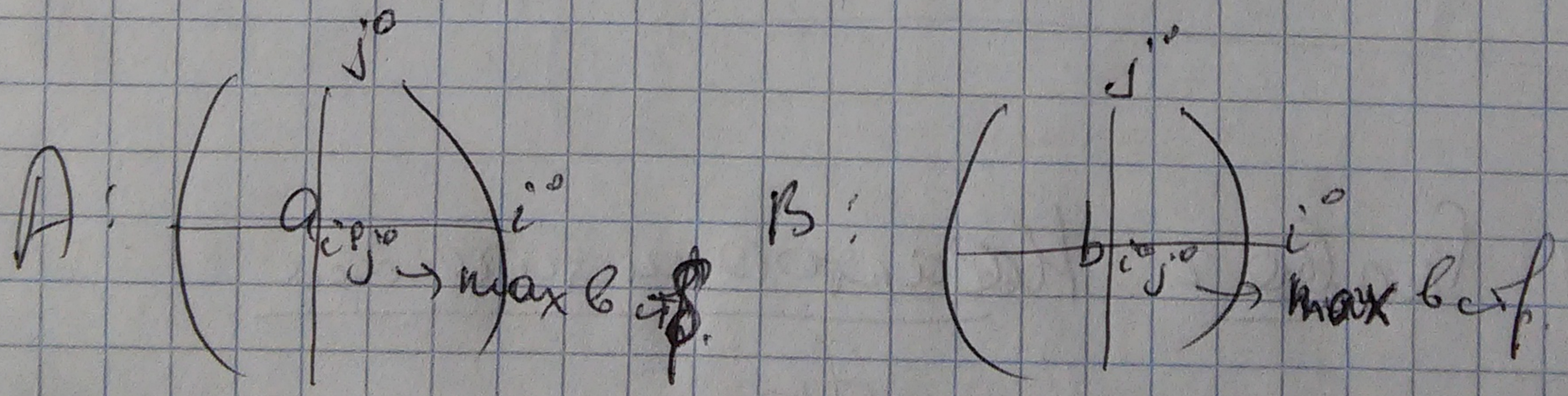
Опр. (x^0, y^0) - ситуация равновесия по Нэшу если: $\begin{cases} F(x^0, y^0) \le F(x^0, y^0) \ \forall x \in X \\ G(x^0, y) \le G(x^0, y^0) \ \forall y \in Y. \end{cases}$

Опр. будем говорить, что н/о Γ - биматричная, если мн-ва X и Y - конечны, т.е. $X = \{1, \dots, m\}$, $Y = \{1, \dots, n\}$,

$\Rightarrow A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$, где

$F(i,j) = a_{ij}$, $G(i,j) = b_{ij}$.

$\Rightarrow$ равновесие: $\begin{cases} a_{ij^0} \le a_{i^0 j^0} \ \forall i = \overline{1,m} \\ b_{i^0 j} \le b_{i^0 j^0}, \ j = \overline{1,n}. \end{cases}$



Примеры:

1) Семейный спор:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\text{т}}_{\text{ф}}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{\text{т}}_{\text{ф}}$$

равн.: (1,1) ; (2,2) → разные ответы.

2) Решение задачи:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}^{\text{ч}}_{\text{б}}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}^{\text{ч}}_{\text{б}}$$

2 равн. => не уст.

=> (?,2).

Опр. (x^0, y^0) – опт. по Парето, если

$\forall (x,y)$: $\begin{cases} F(x,y) \geq F(x^0,y^0) \\ G(x,y) \geq G(x^0,y^0) \\ \text{и хотя бы одно из них – строго} \end{cases}$

Если $G \equiv -F$, то ∀ ситуация опт. по Парето.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (1,1) \text{ – опт. равн.}$$

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$W_1(1) = \min_{1 \leq j \leq 3} a_{1j} = 0$$

$$W_1(2) = \min_{1 \leq j \leq 3} a_{2j} = 2$$

] $I = \{1, \dots, s\}$, $s \geq 2$.

$x_k \in X_k$.

$x = (x_1, \dots, x_s) \in X = \prod_{k=1}^{s} X_k$

/

игроки

$f_k(x)$, $x \in X$

$\Gamma = \langle X_k, f_k(x), k \in I \rangle$.

$x \in X$, $y_k \in X_k$.

$x \| y_k = (x_1, \dots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \dots, x_s)$.

Опр $x^0 \in X$ – <u>ситуация равновесия</u>, если

бом-но: $\max\limits_{x_k \in X_k} f_k(x^0 \| x_k) = f_k(x^0)$ $\forall k = \overline{1,s}$.

(сим $f_k(x^0 \| x_k) \leq f_k(x^0)$ $\forall x_k \in X_k$, $k = \overline{1,s}$).

<u>Теорема Брауэра</u>.

] Z – вып. комп. выпукл. мн-во;

$f: Z \to Z$,] f – непр.

<u>Тогда</u> $\exists z^0 \in Z : f(z^0) = z^0$

(т.е. z^0 – неподвижная точка)

б/доп-во

Теорема 2.1

$\exists$ выпк Γ X_k - вып. комп. евклид. п/п. в.

$\exists F_k(x)$ - непр. по $\overset{s}{\underset{k}{\cancel{\ast\ast\ast}}}$. $X_2 \times \bigcap_{k-1} X_\ell$.

$\exists f_k(x)$: при фикс. x_ℓ, $\ell \neq k$, $F_k \cap_{x_\ell}$.

Тогда в Γ $\exists$ сил. равн-я.

Доп-во:

$\Longleftarrow$

1) $\exists F_k(x)$ строго вогн. по X_k. $\forall x_k$.

$F_k(x)$ x_ℓ, $\ell \neq k$

$X_k(x_\ell, \ell \neq k) = \underset{x_k \in K_k}{\operatorname{Argmax}} F_k(x)$ - ед-но комп. отвеч. $\{\exists! f_k(x_\ell, \ell \neq k)\}$

x^0: $x_k^0 \in X_k(x_\ell^0, \ell \neq k)$, $k = \overline{1,S}$ - сил. равн.

f_k - непр. (следует из Т. 1.2).

$f_k(x_\ell^0, \ell \neq k) = x_k^0$, $k = \overline{1,S}$. $\Rightarrow$ сил. реш. в силу Т. 1.2 + Т. Брауэра.

$\#$

2) $\exists F_k(x)$ вогн. по X_k.

$\varepsilon > 0$,

$\exists F_k^\varepsilon(x) = F_k(x) - \varepsilon \cdot |x_k|^2$. "возрастающий параметр"

$F_k^\varepsilon(x^\varepsilon \| x_k) \leqq F_k^\varepsilon(x^\varepsilon)$, $\forall x_k \in X_k$, $k = \overline{1,S}$

x^ε - сх. р.

$\varepsilon_k \to 0$: $\varepsilon \to \varepsilon_k$.

$k = \overline{1,2}$

$X^{\varepsilon_4} \in X$ → вогнутая ч-ва ч/комп-ть.
(компакт.)

→ X^{ε_4} → x^0 → x^0 - с.р. ? → #.



Пример

1) $A = \begin{pmatrix} \textcircled{4} & \textcircled{3} & \textcircled{5} & -1 \\ \textcircled{4} & -2 & 3 & \textcircled{4} \\ 2 & 1 & \textcircled{5} & \textcircled{4} \\ -1 & \textcircled{2} & 5 & 3 \end{pmatrix}$ → ?

$B = \begin{pmatrix} \boxed{7} & 5 & 4 & \boxed{7} \\ 4 & \boxed{5} & \boxed{5} & 4 \\ -3 & \boxed{6} & \boxed{6} & 2 \\ \boxed{8} & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

$X(i) = \underset{1 \le j \le 4}{\text{Argmax}} a_{ij} = \{1, 2\}$ $\quad Y(i) = \underset{1 \le j \le 4}{\text{Argmax}} b_{ij} = \{1, 4\}$

$$\begin{cases} i^0 \in X(j^0) \\ j^0 \in Y(i^0) \end{cases}$$

→ (1,1) ; (3,3). (где совпадают □ и ○).

2) $F(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 + 2xy - 5y^2 + 3x$

$G(x,y) = x^2 + 4xy - y^2 - y$

$X = [-1, 2]$

$Y = [-2, 1]$

$F''_{xx} < 0$, $G''_{yy} < 0$ → оба строго вогн. по своим пер.

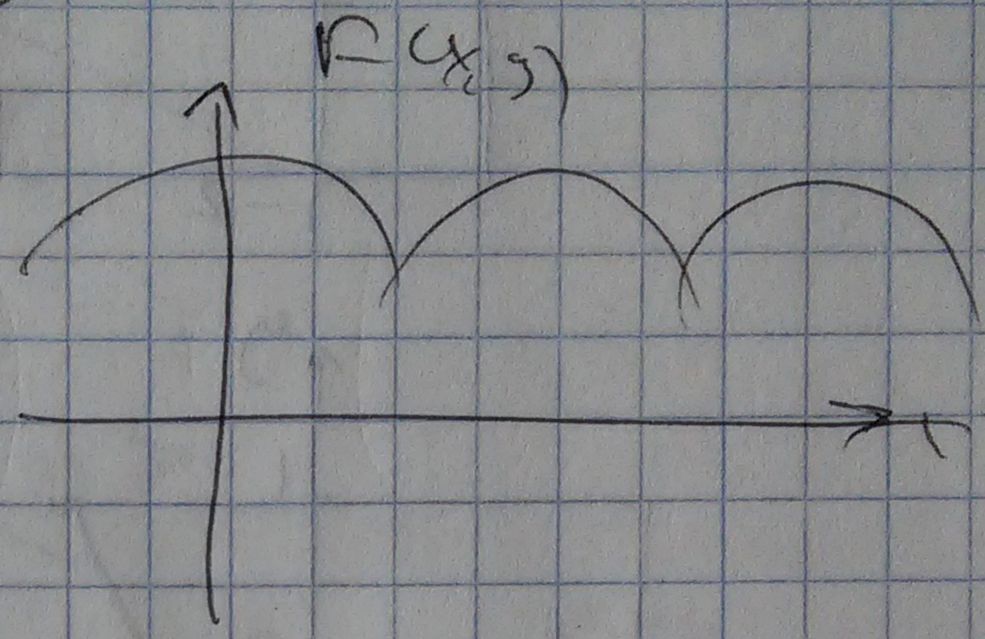
$X(y)$: $F(x(y), y) = \max\limits_{-1 \le x \le 2} F(x, y)$

$y(x)$: $G(x, y(x)) = \max\limits_{-2 \le y \le 1} G(x, y)$

(x^0, y^0): $\begin{cases} x(y^0) = x^0 \\ y(x^0) = y^0 \end{cases}$

$F'_x = 0$: $-x + 2y + 3 = 0$

$x = 2y + 3.$



$-1 \le x \le 2.$

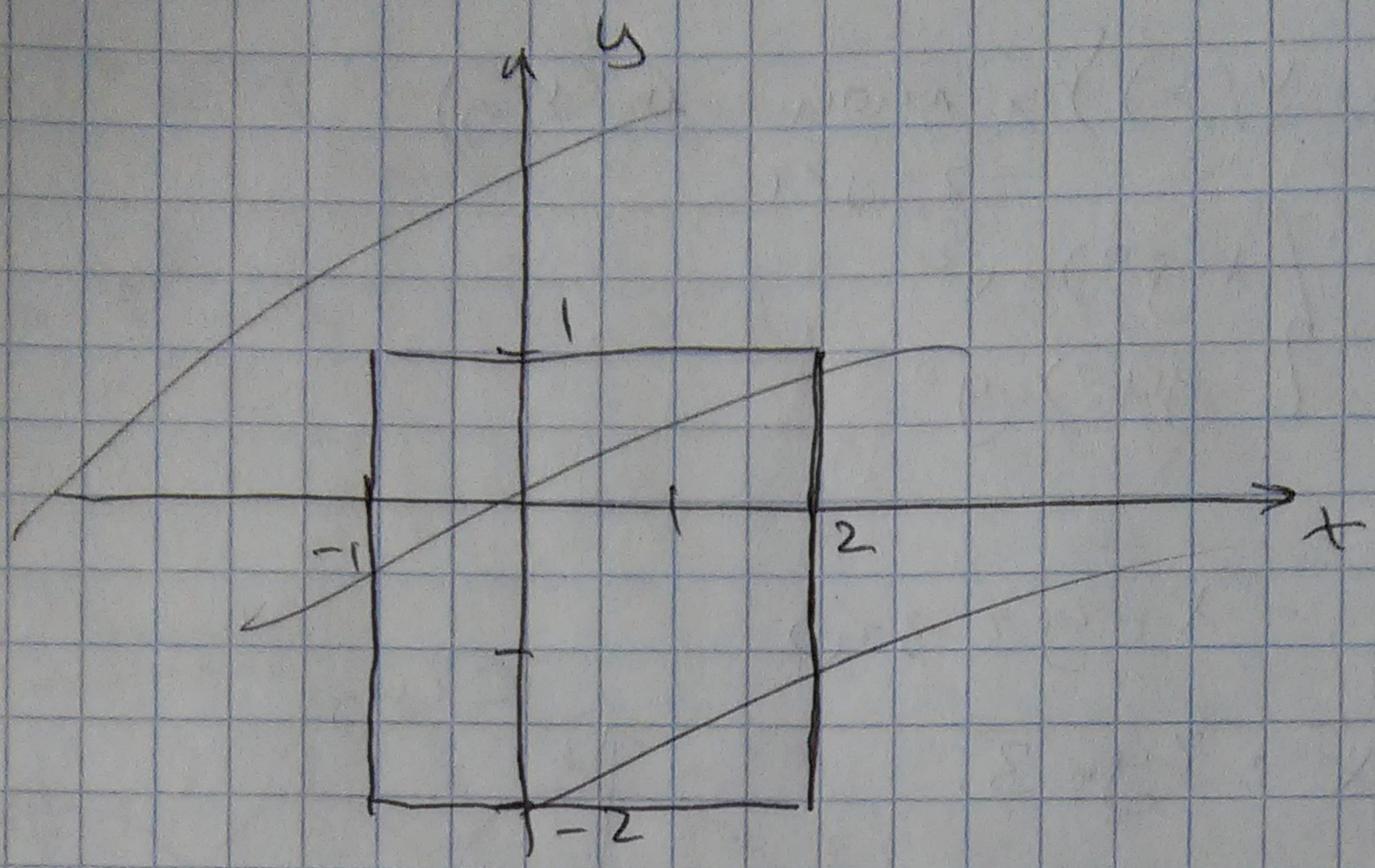
$-2 \le y \le -\frac{1}{2}$

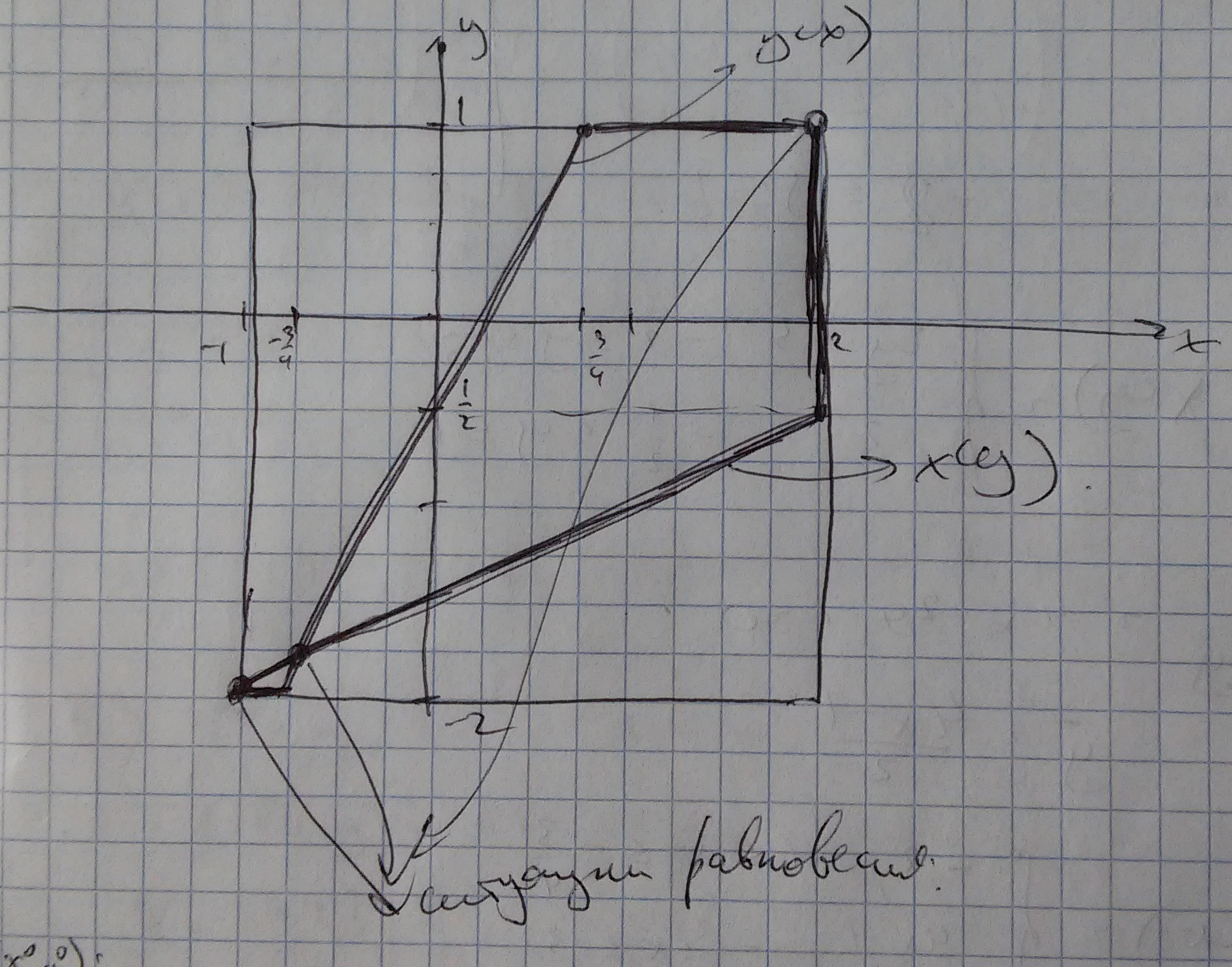
$\Rightarrow x(y) = \begin{cases} 2y + 3, & -2 \le y \le -\frac{1}{2} \\ 2, & -\frac{1}{2} \le y \le 1. \end{cases}$

$G'_y = 4x - 2y - 1 = 0.$

$y = \frac{4x - 1}{2}.$

$y(x) = \begin{cases} -2, & -1 \le x \le -\frac{3}{4} \\ \frac{4x - 1}{2}, & -\frac{3}{4} \le x \le \frac{3}{4} \\ 1, & \frac{3}{4} \le x \le 2. \end{cases}$





Следующие равновесия:

(x^0, y^0): $(-1, -2)$; $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{11}{6}\right)$; $(2, 1)$.

Пусть $A = (c_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$.

$p \in P$, $q \in Q$.

$$A(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i c_{ij} q_j$$

$$B(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i b_{ij} q_j$$

$\bar{\Gamma} = \langle P, Q, A(p,q), B(p,q) \rangle$.

Опр. (p^0, q^0) – ситуация равновесия в $\bar{\Gamma}$, если

Лемма 3

(p^0, q^0) – с.р. в $\Gamma \Leftrightarrow$

$$A(i, q^0) \leq A(p^0, q^0), \; i = \overline{1, m} \qquad (*)$$

$$B(p^0, j) \leq B(p^0, q^0), \; j = \overline{1, n}$$

Док-во:

необх:

(p^0, q^0) – с.р. $\overset{?}{\Rightarrow} (*)$

$A(p, q^0) \leq A(p^0, q^0) \; \forall p \in P$

$B(p^0, q) \leq B(p^0, q^0) \; \forall q \in Q$

$p = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)$

$\Rightarrow (*)$. $\blacksquare$

Фокус:

$(*) \overset{?}{\Rightarrow} (p^0, q^0)$ - с.р.

Пр $A(i, q^0) \leq A(p^0, q^0)$ $\forall i \geq 0$ и $\leq$

$\Downarrow$

$A(p, q^0) \leq A(p^0, q^0)$

$\Rightarrow$ Пр, для q - аналогично. #

Теорема 2.2 (св-во дополняющей нежесткости)

$\forall$ (p^0, q^0) - с.р. в Γ.

Тогда: 1) если $p_i^0 > 0 \Rightarrow A(i, q^0) = A(p^0, q^0)$

2) если $q_j^0 > 0 \Rightarrow B(p^0, j) = B(p^0, q^0)$.

Доказ-во:

Докажем 1):

Д: $\exists i_1$: $p_{i_1}^0 > 0$, $A(i_1, q^0) < A(p^0, q^0)$

$\Rightarrow$ ог. #

Следствие 1

$\exists (p^0, q^0)$ - с.р. в Λ

Тогда 1) $A(i, q^0) < A(p^0, q^0) \Rightarrow p_i^0 = 0$

2) $B(p^0, j) < B(p^0, q^0) \Rightarrow q_j^0 = 0$.

Теорема 2.3

$\exists (p^0, q^0)$ – в.с.р. в П.

Тогда $\exists X^0 \subset X = \{1, \dots, m\}$, $\exists Y^0 \subset Y = \{1, \dots, n\}$,

$\exists v_1, v_2 :$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j \in Y^0} q_{ij} q_j^0 = v_1, \quad \forall i \in X^0 \\ \sum\limits_{j \in Y^0} q_j^0 = 1 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \in X^0} p_i^0 b_{ij} = v_2, \quad \forall j \in Y^0 \\ \sum\limits_{i \in X^0} p_i^0 = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Док-во:

$X^0 = \{i \mid p_i^0 > 0\}$ $\quad v_1 = A(p^0, q^0)$

$Y^0 = \{j \mid q_j^0 > 0\}$ $\quad v_2 = B(p^0, q^0)$.

$i \in X^0$, $p_i^0 > 0 \overset{т.2.2.}{\Rightarrow} A(i, q^0) = A(p^0, q^0) = v_1$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^0 = \sum_{j \in Y^0} a_{ij} q_j^0 .$$

(2) – аналогично.

∎

23.03.15

$A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$

(p^0, q^0) - с.р., $\exists$ с.

$A(p, q^0) \le A(p^0, q^0) \quad \forall p \in P$

$B(p^0, q) \le B(p^0, q^0) \quad \forall q \in Q.$

$A(i, q^0) \le A(p^0, q^0) \quad \forall i = \overline{1, m}$

$B(p^0, j) \le B(p^0, q^0) \quad \forall j = \overline{1, n}.$ (*)

Т. 2.3)

(p^0, q^0) - с.р. $\exists X^0 \subset X$, $\exists Y^0 \subset Y$, $\exists v_1, v_2$:

$$\begin{cases} \sum_{j \in Y^0} a_{ij} q_j^0 = v_1, \ \forall i \in X^0 \\ \sum_{j \in Y^0} q_j^0 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sum_{i \in X^0} p_i^0 b_{ij} = v_2, \ \forall j \in Y^0 \\ \sum_{i \in X^0} p_i^0 = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Зам

$\bar{A} = (a_{ij})_{i \in X^0, j \in Y^0}$, $|X^0| = |Y^0|$

$\bar{B} = (b_{ij})_{i \in X^0, j \in Y^0}$ - верно обратно.

q_j^0, $j \in Y^0$, v_1 $|Y^0| \ne 1$

p_i^0, $i \in X^0$, v_2.

$\exists\ (p^0; q^0)$: (1) (2)

$|X^0| = |Y^0|$ $\quad$ $\underline{A}, \underline{B}$ $\quad$ $\bar{A}, \bar{B}$ $\quad$ $2\times2,\ 3\times3,\ \dots$

$p^0 = (\underset{i \notin X^0}{0}, \dots, p_i^0, \dots, 0)$ $\quad$ $i \in X^0$

$q^0 = (\underset{j \notin Y^0}{0}, \dots, q_j^0, \dots, 0)$ $\quad$ $j \in Y^0$

$v_1 = A(p^0, q^0)$, $v_2 = B(p^0, q^0)$

$A(p^0, q^0) = \sum_{i \in X^0} p_i^0 \left(\sum_{j \in Y^0} a_{ij} q_j^0\right) = v_1$

"доверяем (*)": $\begin{cases} A(i, q^0) \le v_1, \\ B(p^0, j) \le v_2 \end{cases}$ $\forall i, j$

Вот $\Rightarrow$ наши с.р. $\quad$ не вся область допуст.

$\exists\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$ $\quad$ тоже с.р. всего Δ

$\exists\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \end{pmatrix} \begin{matrix} p_1 \\ 1-p_1 \end{matrix}$

зафиксируем 2×2.

$\bar{B} = \begin{pmatrix} b_{1j_1} & b_{1j_2} \\ b_{2j_1} & b_{2j_2} \end{pmatrix} \begin{matrix} p_1 \\ 1-p_1 \end{matrix}$ $\quad = B(p_1^0, j_1)$

$\begin{cases} b_{1j_1} p_1^0 + b_{2j_1}(1-p_1^0) = v_2 \\ b_{1j_2} p_1^0 + b_{2j_2}(1-p_1^0) \le v_2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ вот так $\rightarrow p_1^0$.

$\le B(p_1^0, j_2)$

предположим: $p_1^0 \in [0;1]$.

$$B(p_1^0, j) = \underbrace{b_{1j}}_{q^*} p_1^0 + \underbrace{b_{2j}}_{1-q^*}(1-p_1^0) \le v_2 \quad \forall j \neq j_1, j_2 \quad (*)$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} \end{pmatrix}$$

$$A(1, p^0): a_{1j_1} q^* + a_{1j_2}(1-q^*) = v_1 \quad (1) \to q^*$$
$$A(2, p^0): a_{2j_1} q^* + a_{2j_2}(1-q^*) = v_1$$

предположим $q^* \in [0;1]$.

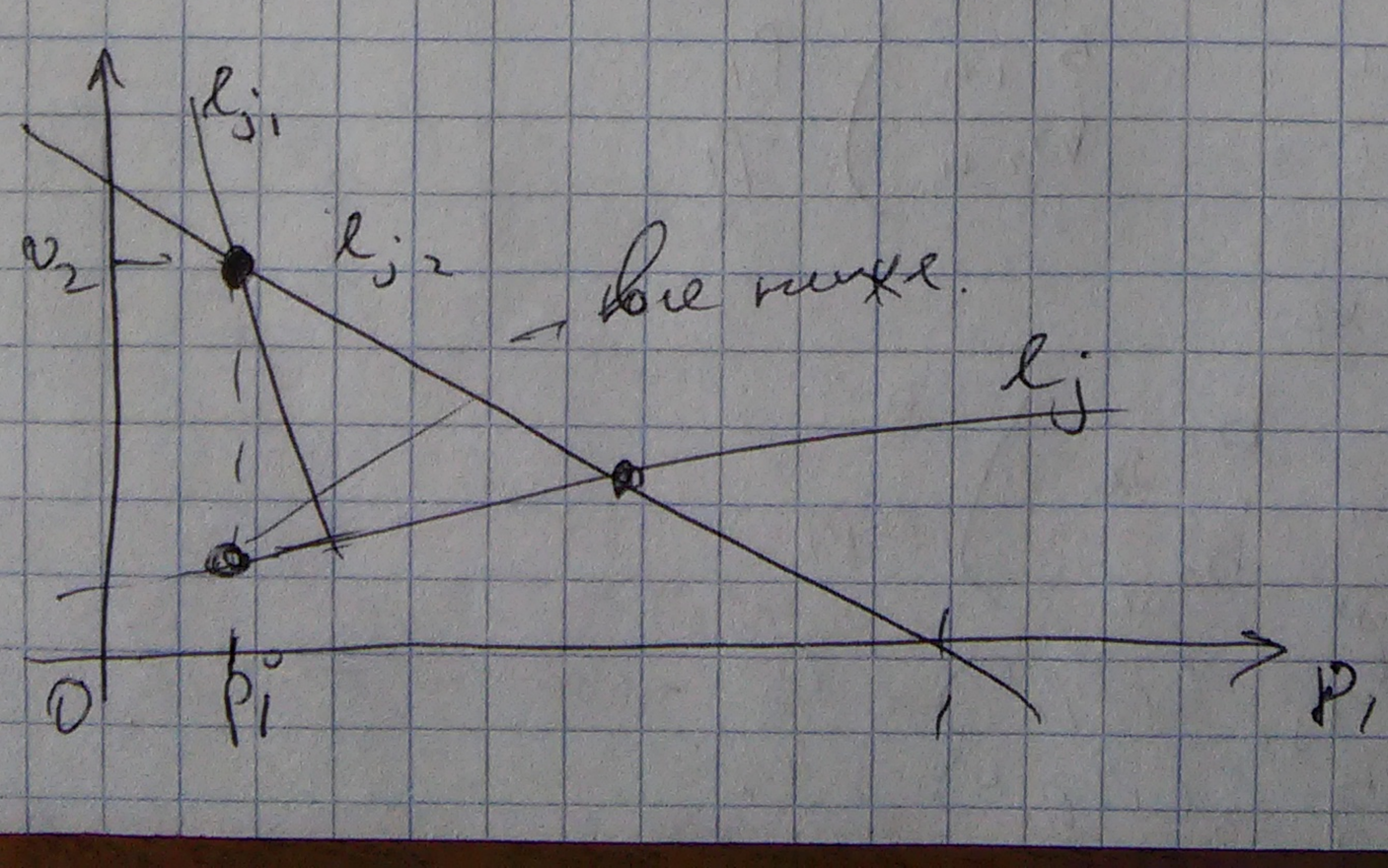
$$q^0 = (0, \dots, \underset{j_1}{q^*}, 0, \dots, \underset{j_2}{1-q^*}, 0 \dots)$$

усл-е $(*)$ не выполнено.

$$\ell_j(p_1) = B(p_1, j)$$

$$\ell_{j_1}(p_1^0) = \ell_{j_2}(p_1^0) = v_2 \quad (2)$$

$$\ell_j(p_1^0) \le v_2 \quad \forall j \neq j_1, j_2 \quad (*)$$



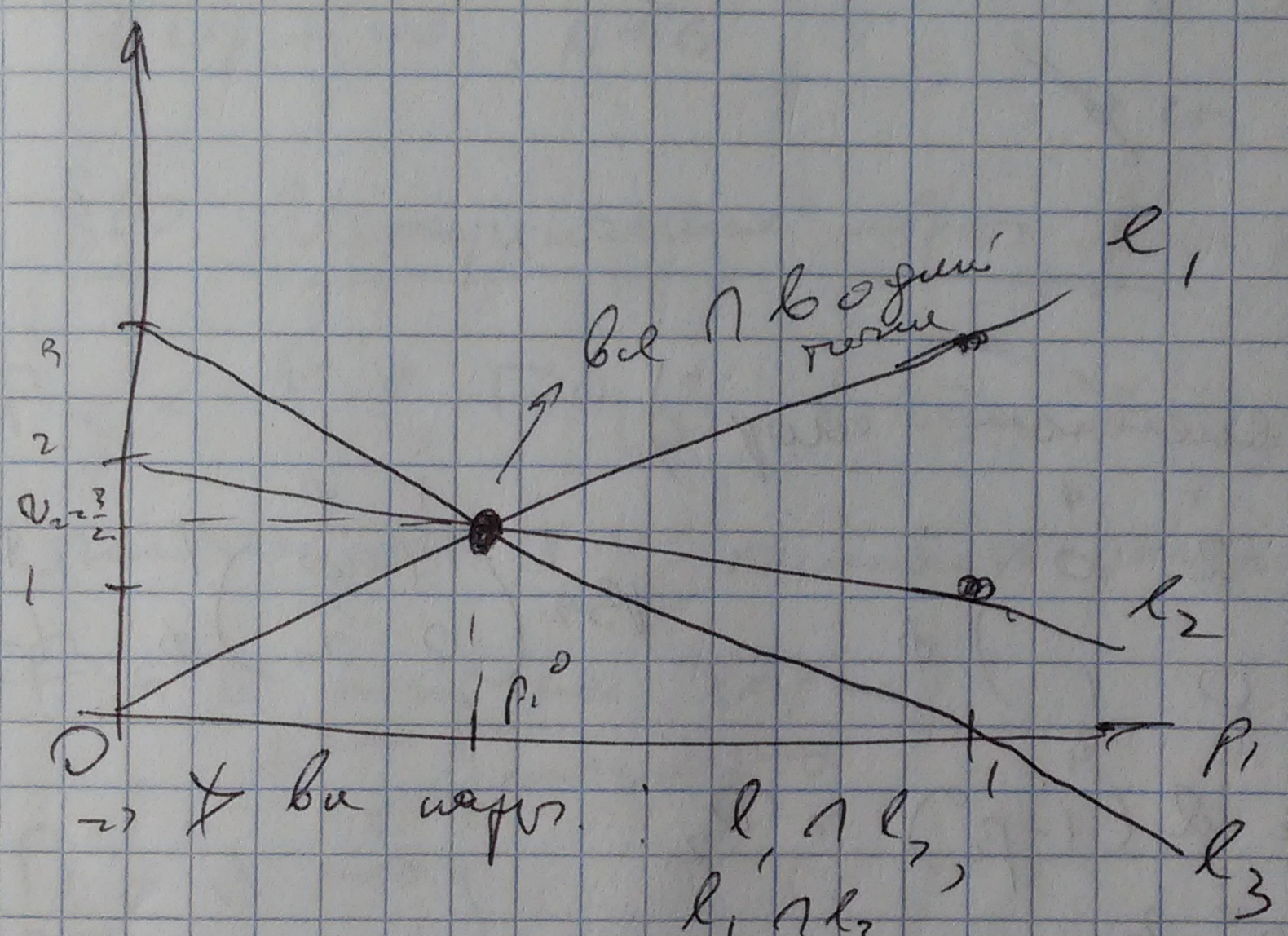
Пример $q^*, 1-q^*$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} p_1 \\ 1-p_1 \end{matrix}$$

$$\ell_1(p_1) = 3p_1$$

$$\ell_2(p_1) = p_1 + 2(1-p_1) = 2-p_1$$

$$\ell_3(p_1) = 3(1-p_1) \text{ ea}$$



$\Rightarrow$ 3 вида мер.: $\ell_1 \cap \ell_2$,
$\ell_1 \cap \ell_3$,
$\ell_2 \cap \ell_3$.

$$\ell_1(p_1^0) = \ell_2(p_1^0)$$

$$p_1^0 = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow p^0 = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

$\ell_1 \cap \ell_2$:

$$2q^* + 4(1-q^*) = 4q^* + 2(1-q^*) = v,$$

$$\Rightarrow q^* = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \boxed{p^0, q^0 = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)} \quad \ldots$$

$\ell_2 \cap \ell_3$:

$2q^t + 5(1-q^t) + 4q^t + 1 - q^t$

$\to q^t = \frac{2}{3}$.

$\Rightarrow \boxed{P^0, q^0 = (\frac{2}{3}; 0; \frac{1}{3})}$

$\ell_2 \cap \ell_3$:

$4q^t + 5(1-q^t) = 2q^t + 1 - q^t = 2$,

$\to q^t = 2 \Rightarrow \emptyset$.

Пример:

(игра «семейный спор")

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Т, Ф)

$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (Т, Ф)

q_1 $1-q_1$ — P_1 $1-P_1$

$P_1^0 = 2(1-P_1^0) = v_2$.

$P_1^0 = \frac{2}{3}$.

$\to P^0 = (\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$ — жене, $v_2 = \frac{2}{3}$.

...

$q^0 = (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ — муж.

Теорема 2.4 (о доминировании стр.) (а т. 1.5)

$\exists$ нек. стр мат. A в матр. игре доминируется вып. комбинацией осн. стр.

Тогда эта стр входит с $0^{\text{ой}}$ вер-ю в нек. равновесную смешан. стр. 1го игрока — её можно

Если доминирование строгое, то она входит с 0ой вер-ю ~~во все рав~~ в ∀ равн. сим. стр. 1ой игрока

б/доп-во.

Теорема 2.5 (о дом. стб) (~т. 1,2)

аналогично.
(стр. → стб.; A → B

§10. Иерархические игры двух лиц.

$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y), G(x,y) \rangle$, $F \neq -G$.

считаем, что X, Y - компакты евклид. пр-в

~~Итак~~: F и G непр. на $X \times Y$.

выбирает 1ый, сообщает 2ому

Γ_1: $x \xrightarrow{2} y$

$y \in Y(x) = \operatorname{Argmax}_{y \in Y} G(x,y)$

интересует компромиссный гарант. выигрыш 1го.

Эконом. интерпр.:

игрок 1 - центр, x - цена прод.
игрок 2 - производитель, y - объём произвед. прод.

$W(x) = \min_{y \in Y(x)} F(x,y)$

$F_1 = \sup_{x \in X} W(x)$

$\forall \varepsilon > 0$ $x^\varepsilon \in X$, ε-опт. опред. $W(x^\varepsilon) \geq F_1 - \varepsilon$.

$W(x) = F(x, y(x))$

Равновесие по Штакельбергу.

$y \in Y^*(x) = \underset{y \in Y(x)}{\operatorname{Argmax}} F(x, y)$

$W^*(x) = \max\limits_{y \in Y(x)} F(x, y)$

$F_1^* = \sup\limits_{x \in X} W^*(x)$

Опр. $\{x^0, y^0\}$ - <u>равн. по Шт.</u>, если

усл.: 1) $x^0 : W^*(x^0) = \max\limits_{x \in X} W^*(x)$

2) $y^0 \in Y^*(x^0)$

Лемма 2

В сделанных предположениях

$W^*(x)$ *достигает на* X *своих значений.*

Док-во:

$\exists x^k \in X$, $W^*(x^k) \to F_1^*$?

$y^k \in Y^*(x^k) \subseteq Y(x^*)$

$x^k \to x^0$

$y^k \to y^0$.

$G(x^k, y^k) \geq G(x^k, y)$ $\forall y \in Y$, $k = 1, 2, \ldots$

фикс. y, $k \to \infty$:

$$G(x^0, y^0) \geq G(x^0, y) \quad \forall y \in Y \Rightarrow y^0 \in Y(x^0).$$

$$W^*(x^0) = \max_{y \in Y(x^0)} F(x^0, y) \geq F(x^0, y^0) =$$

$$= \lim_{k \to \infty} F(x^k, y^k) = \lim_{k \to \infty} W^*(x^k) = F_1^* =$$

$$= \sup_{x \in X} W^*(x)$$

$$\Rightarrow W^*(x^0) = \sup_{x \in X} W^*(x)$$

∎.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} \underline{3} & 6 & 8 \\ \underline{4} & \underline{3} & 2 \\ \underline{7} & \underline{-5} & \underline{4} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \underline{7} & 4 & 3 \\ \underline{2} & \underline{7} & 3 \\ \underline{-1} & \underline{1} & \underline{1} \end{pmatrix}$$

↑ столб. — строки

решим F_1^*:

$F_1 = \max\limits_{i=\overline{1,3}} \min\limits_{j \in Y(i)} a_{ij} = \min\limits_{j \in Y(i^0)} a_{i^0 j}$

$Y(1) = \{1, 3\}$

$W(1) = 3$
$W(2) = 3$
$W(3) = -5$

$F_1 = 3, \quad i^0 = 1, 2$

$Y^*(i) = \operatorname{Argmax}\limits_{j \in Y(i)} a_{ij}$

$W^*(1) = 3 \qquad W^*(2) = 4 \qquad W^*(3) = 4.$

$(c^0, j^0) = (2,1) > (3,3)$ — равн. по Нэшу.

Пример:

$f(x,y) = 3x + 2y \qquad X = Y = [0;1]$

$\delta(x,y) = (x-y)^2$

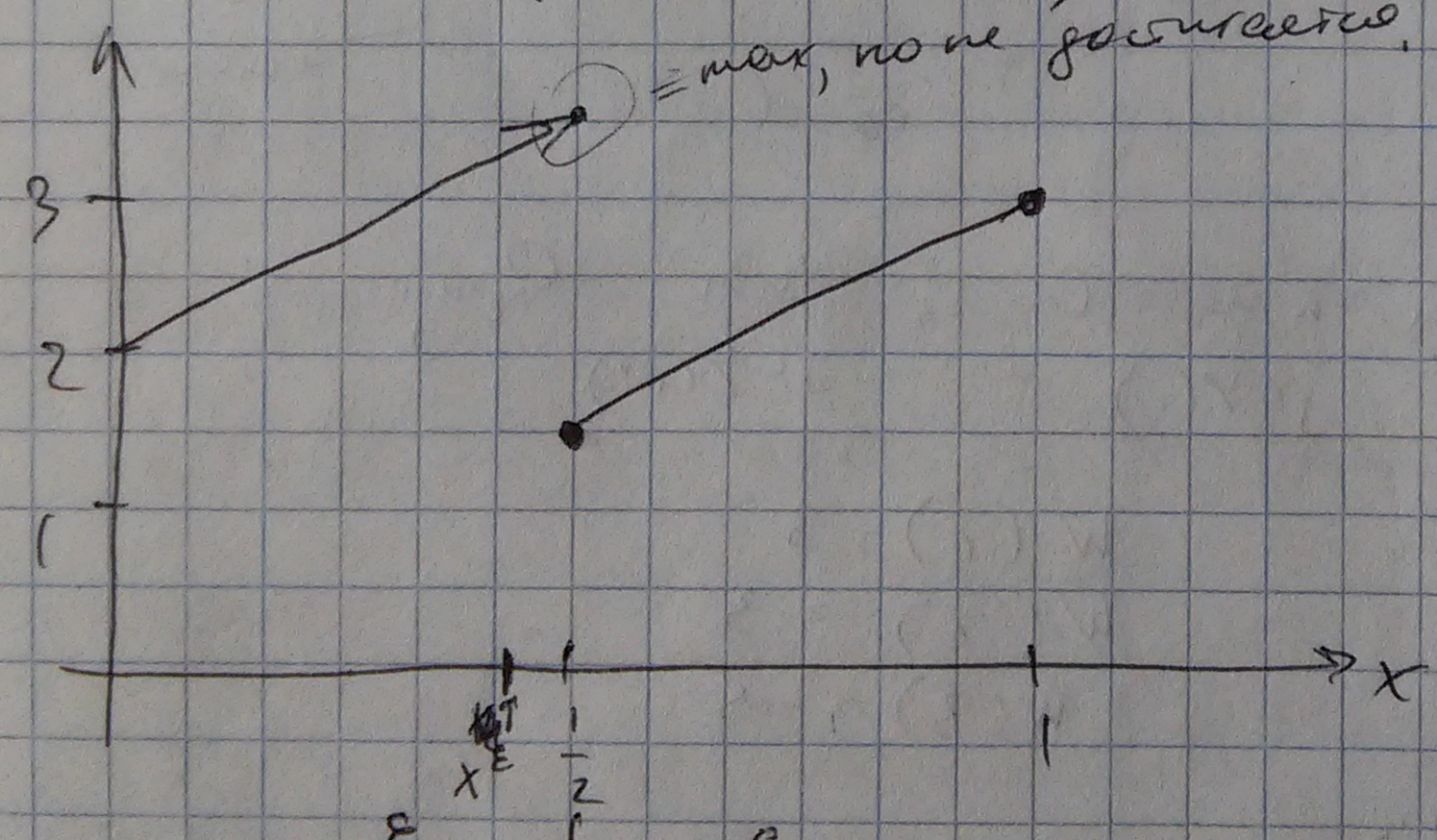
найти F_1.

$W(x)$

$F_1 = \sup\limits_{0 \le x \le 1} \min\limits_{y \in Y(x)} \overbrace{F(x,y)}^{\text{"}3x+2y\text{"}}$

$$Y(x) = \begin{cases} \{1\}, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \{0,1\}, & x = \frac{1}{2} \\ \{0\}, & \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow W(x) = \begin{cases} 3x+2, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 3/2, & x = \frac{1}{2} \\ 3x, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$



= max, но не достигается.

$\Rightarrow x^\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}.$

$W(x^\varepsilon) = \frac{3}{2} - \varepsilon.$

$(x^0, y^0) = \left(\frac{1}{2}, 1\right).$

$$\Gamma_2 : \quad X \quad \to \quad f(y) \; ; \; P: Y \to X$$

знаю y

$$f \xrightarrow{2} y \xrightarrow{1} x = f(y).$$

Этапы интерп.:

1 - узнать
2 - вычислить
$f(y)$ - размер прямо за y.

$$f \qquad G(\underbrace{f(y)}_{\text{ск. б. разрывная}}, y)$$

$$y \in Y(f) = \operatorname{Argmax}_{y \in Y} G(f(y), y)$$

если $\varnothing$, то $\forall y \in Y$.

т.е. $\tilde{Y}(f) = \begin{cases} Y(f), & Y(f) \neq \varnothing \\ Y, & Y(f) = \varnothing. \end{cases}$

$W(f) = \inf_{y \in Y(f)} F(f(y), y)$ - гарант. рез-т $\forall$.

$F_2 = \sup_{f \in \{f\}} W(f)$ - надо найти.

f^ε - ε-оп. кобол, если $W(f^\varepsilon) \geq F_2 - \varepsilon$. $\varepsilon > 0$.

Опр $G_2 \triangleq \max_{y \in Y} \min_{x \in X} G(x, y)$

f^H: $f^H(y) \in \underset{x \in X}{\operatorname{Arg\,min}}\, G(x,y)$ $\forall y \in Y$.

$E \triangleq \underset{y \in Y}{\operatorname{Argmax}} \left[\min_{x \in X} G(x,y) \right]$

$D \triangleq \{ (x,y) \in X \times Y \mid G(x,y) > G_2 \}$.

$$K \triangleq \begin{cases} \sup_{(x,y) \in D} F(x,y), & D \neq \emptyset \\ -\infty, & D = \emptyset. \end{cases}$$

$\exists \varepsilon > 0$.

$(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \in D$; $F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \geq K - \varepsilon$.

$$f_k^\varepsilon : f_k^\varepsilon(y) = \begin{cases} x^\varepsilon, & y = y^\varepsilon \\ f^H(y), & y \neq y^\varepsilon. \end{cases}$$

$M = \min_{y \in E} \max_{x \in X} F(x,y)$

$X(y) = \underset{x \in X}{\operatorname{Argmax}}\, F(x,y)$

$X^*(y) = \underset{x \in X}{\operatorname{Arg\,max}}\, G(x,y)$

f^*: $f^*(y) \in X^*(y)$, $y \in Y$.

$$f_m^\circ : f_m^\circ(y) = \begin{cases} f^*(y), & y \in E \\ f^H(y), & y \notin E. \end{cases}$$

Теорема 2.6 (т. Гермейера)

$f_2 = \max[K, M]$. При этом

если $K > M$, то f_K^{ε} – ε-опт. страт., однозн.-я K

если $K \le M$, то f_M^{0} – опт. страт.

Док-во:

I) докажем, что $\max[K, M]$ можно реализовать

II) докажем, что $\forall f \in \{f\} \quad W(f) \le \max[K, M]$.

I) 1) $K > M$.

f_K^{ε}

$G(f_K^{\varepsilon}(y), y)$

если $y = y^{\varepsilon}$, то $G(x^{\varepsilon}, y^{\varepsilon}) > G_2$.

если $y \neq y^{\varepsilon}$, то $G(f^{M}(y), y) = \min\limits_{x \in X} G(x, y) \in G_2$.

т.е. $W(f_K^{\varepsilon}) = F(x^{\varepsilon}, y^{\varepsilon}) \ge K - \varepsilon$.

2) $K \le M$.

f_M^{0}

$G(f_M^{0}(y), y)$

если $y \in E$, то $G(f^{*}(y), y) \ge \min\limits_{x \in X} G(x, y) = G_2$.

если $y \notin E$, то $G(f^{4}(y), y) = \min\limits_{x \in X} G(x, y) < G_2$.

$$W(f_u^0) = \inf_{y \in Y(f_u^0)} \qquad r = (f^*(y), y) \geq \min_{y \in L} \max_{x \in X} F(x,y) = H.$$

#

II) $\forall f \in \{f\}$

~~$W(f) \leq$~~

$G(f(y), y)^*$

$\sup_{y \in Y} G(f(y), y) \geq \max_{y \in Y} \min_{x \in X} G(x,y) = G_2.$

1) $\sup_{y \in Y} G(f(y), y) > G_2.$

$\exists y^0 \in \tilde{Y}(f): (f(y^0), y^0) \in \varnothing$

$\tilde{Y}(f) = Y(f) \quad y^0 \in Y(f)$

$\tilde{\tilde{Y}}(f) = Y$

~~$G(f)y$~~

$W(f) = \inf_{y \in \tilde{\tilde{Y}}(f)} F(f(y), y) \leq F(\underbrace{f(y^0), y^0}_{\in \Omega}) \leq k$

$L \subseteq Y(f) \quad \forall y \in L.$

$G_2 \sim \sup_{y \in Y} G(f(y), y) \geq$ ~~$\max$~~ $G(f(y), y) \geq$ ~~$\min$~~

$\geq \min_{x \in X} G(x,y) = G_2 \sim$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

соотв.

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$\min$ 4 1 4 3

решим G_2.

$$G_2 = \max_j \min_i b_{ij} = 4 \qquad E = \{1, 2\}$$

$$\mathcal{D} = \{(i,j) \mid b_{ij} \geq G_2 = 4\}$$

$$\Rightarrow K = \max_{(i,j)\in\mathcal{D}} c_{ij} = 4.$$

$$M = \min_{j\in E} \max_i c_{ij} = 6. > K.$$

$j = 1, 2$

$$f_M^0(j) = \begin{cases} 3, & j = 1 \in E \\ 1, & j = 2 \in E \\ 1, & j = 3 \notin E. \end{cases}$$

$$W(f_M^0) = \min_{j=1,2} a_{f^*(j),j} = 6.$$

Глава

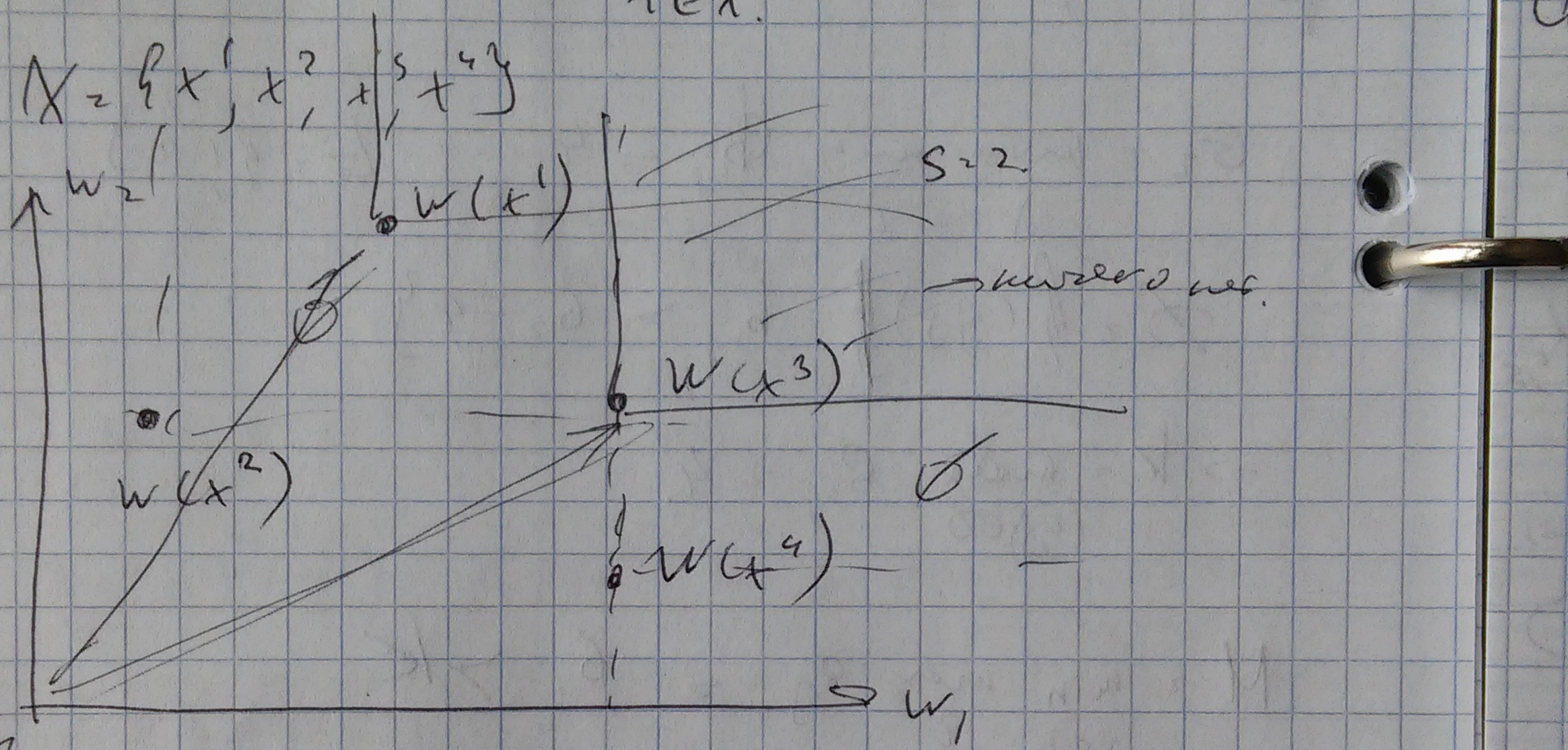
§ 11. Многокритериальная выборка эл-я

$A \cap P \qquad x \in X$

$W(x) = (W_1(x), \dots, W_S(x))$

$W_i(x)$

обычно $\nexists\, x^0 \in \operatorname{Arg\,max}_{x \in X} W_i(x)$, $i = \overline{1,S}$.



Опр. Точка $x^0 \in X$ наз-ся оптимальной по Парето, если

$\nexists\, x \in X : \begin{cases} W_i(x) \geq W_i(x^0), & i = \overline{1,S} \\ W(x) \neq W(x^0) \end{cases}$ $\quad x \succcurlyeq x^0$

$P(X, W)$ - мн-во всех точек, оптимальных по Парето.

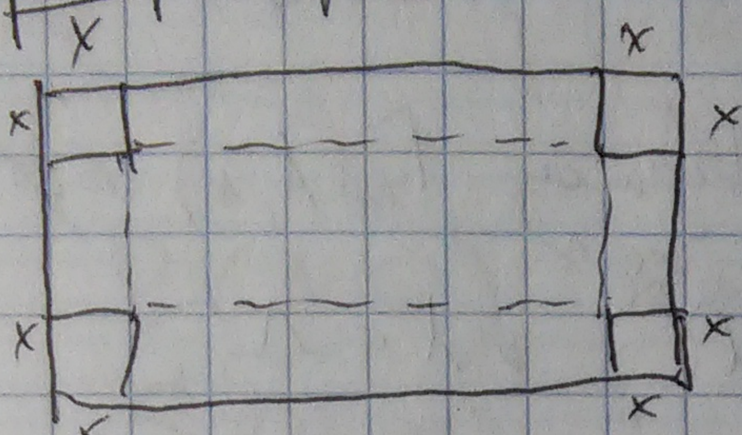
в). $P(X, W) = \{x^1, x^3\}$.

Опр. 2 точка $x^0 \in X$ наз-ся оптимальной по Слейтеру, если $\nexists\, x \in X$: $W_i(x) > W_i(x^0)\ \forall i = \overline{1,S}$.

$S^*(x,w) \supseteq \underline{P}(x,w) \qquad t > t^0$.

$S^*(x\,w)$ в общем $= \{x^1, x^2, x^3\}$

Пример (коробка)



разбили коробку

$\begin{cases} V(x) = x(a-2x)(b-2x) = w_1 \\ S^*(x) = 4x^2 \qquad = w_2. \end{cases}$

упорядочили по возрастанию

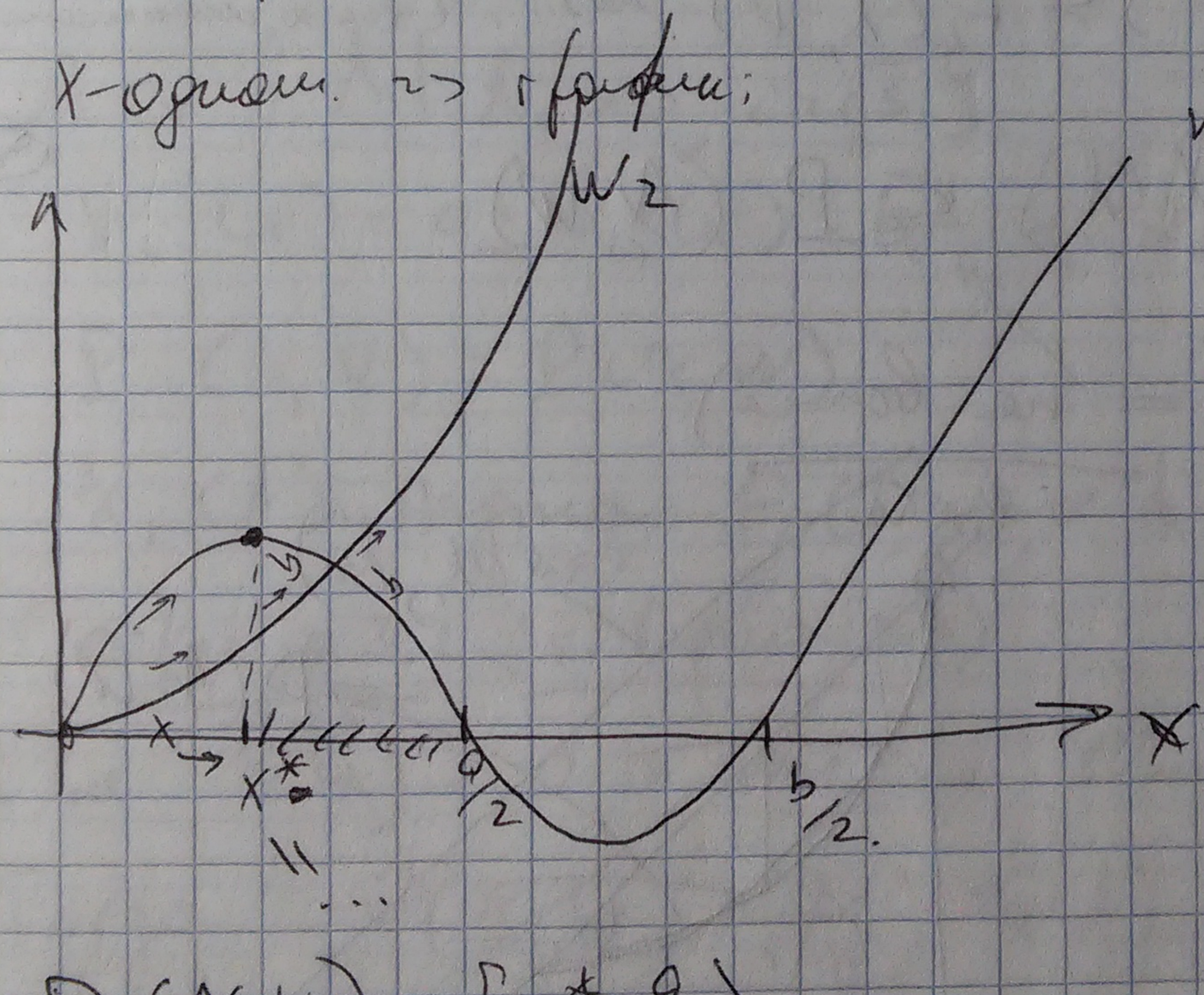
$]0 < b.$

$X = (0; \frac{a}{2})$.

– хотим найти.

$\underline{P}(X,w)$

X-одном. => графики;



$\underline{P}(X,w) = [x^*, \frac{a}{2})$.

Теорема 3.1

$\exists\, w_i(x)$, $i=\overline{1,5}$ непр. на X — непр. нет. на X

Тогда $\underline{P}(X,w) \neq \emptyset$. ($S^*(X,w) \neq \emptyset$).

Док-во:

$\forall F_1(\lambda, x) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i w_i(x)$, где

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \underline{\Lambda} = \{\lambda \mid \lambda_i > 0,\ i = \overline{1,s}\}$.

$F_1(\lambda, x)$ непр. по $x \Rightarrow X_1(\lambda) = \operatorname{Argmax}_{x \in X} F_1(\lambda, x) \neq \varnothing$

докажем, что $\underline{P}(X, W) \supseteq X_1(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$.

(от): $\exists x' \in X_1(\lambda) \setminus \underline{P}(X, W)$.

$\Rightarrow \exists x \in X$: $w_i(x) \geq w_i(x')$, $i = \overline{1,s}$, $\exists i_0$: $w_{i_0}(x) > w_{i_0}(x')$

$\Rightarrow F_1(\lambda, x) > F_1(\lambda, x')$. $\Rightarrow \Leftarrow$ (т.к. $x' \in$ множество max).

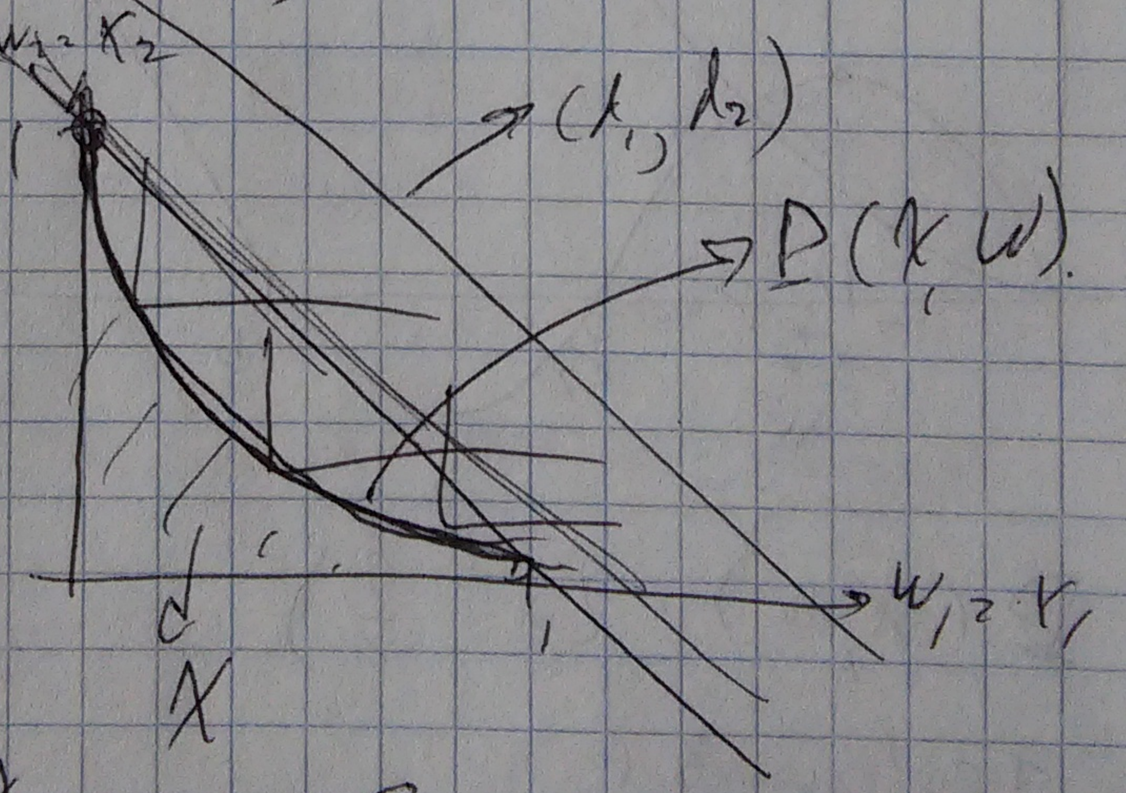
(т.е. $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_1(\lambda) \subseteq \underline{P}(X, W)$.)

Пример (= не вып-ся)

$\exists x = (x_1, x_2)$.

$w_1(x) = x_1$,

$w_2(x) = x_2$.



$F_1(\lambda, x) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = c_1$.

$\Rightarrow X_1(\lambda) \subseteq \{(0,1), (1,0)\} \subset \underline{P}(X, W)$.

$x \in X$, $W(x) = (W_1(x), \dots, W_3(x))$ 30.03.15

x^0 опт. по Парето, если

$\nexists\, x \in X: \begin{cases} W_i(x) \geq W_i(x^0), & i = \overline{1,s} \\ W(x) \neq W(x^0) \end{cases}$

$\underline{P}(X, W)$ - по Парето

$S^0(X, W)$ - по Слейтеру.

$\forall$ свёртку:

$F_2(\lambda, x) = \min\limits_{1 \leq i \leq s} \lambda_i W_i(x)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \Lambda$,

$\Lambda = \{\lambda \mid \lambda_i > 0, i = \overline{1,s}\}$.

$V_i(x) = a_i W_i(x) + b_i$, $a_i > 0$.

$\underline{P}(X, V) = \underline{P}(X, W)$

$X_2(\lambda)$: $\operatorname{Arg\,max}\limits_{x \in X} F_2(\lambda, x)$, $\forall \lambda \in \Lambda$

Теорема 3.2 (Г. Гермейера)

Пусть $W_i(x) > 0$ и непр. на X - комп. метр. пр-во.

Тогда $S^0(X, W) = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} X_2(\lambda)$ (1)

Док-во:

$\boxed{\Rightarrow}$: $\exists\, x' \in X_2(\lambda) \setminus S^0(X, W) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x \in X: W_i(x) \geq W_i(x')$ $\forall i = \overline{1,s}$ $| \cdot \lambda_i$; сложим

$F_2(\lambda, x) > F_2(\lambda, x')$ $\Rightarrow$?! $\neq$

Π: $\exists \lambda^0 \in \Delta : x^0 \in X_2(\lambda^0)$

$\vdash x^0 \in g(\lambda, w)$

$\lambda^0 : \lambda_i^0 = \dfrac{1}{w_i(x^0) \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{w_k(x^0)}} > 0.$

$\forall x \in X \; F_2(\lambda^0, x) \geq F_2(\lambda^0, x^0)$.

$\forall x \in X : \exists j : w_j(x) \leq w_j(x^0)$

$F_2(\lambda^0, x) = \min_{1 \leq i \leq s} \lambda_i^0 w_i(x) \leq \lambda_j^0 w_j(x) \leq d_j^0 w_j(x^0) =$

$= \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{s} \frac{1}{w_k(x^0)}} = \min_{1 \leq i \leq s} \lambda_i^0 w_i(x^0) = F_2(\lambda^0, x^0)$

$\star$

$\star$

$X = \{x', \dots, x^u\}$.

$x \succcurlyeq x' \begin{cases} w_i(x) \geq w_i(x'), \; i = \overline{1,s} \\ w(x) \neq w(x') \end{cases}$

$P(X, w)$

1) $\Omega = \{x'\}$

$k-1$ шаг $\to \Omega$

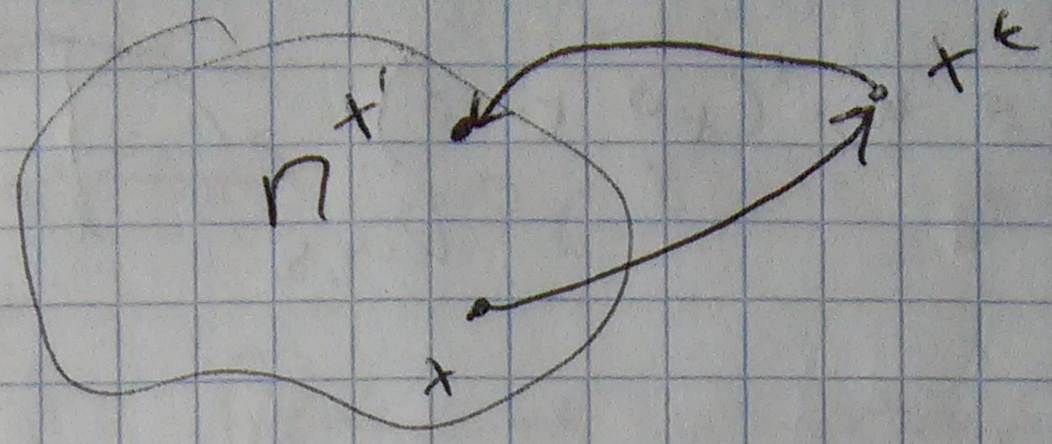
шаг k: x^k, Ω.

Вар-ты 1) $\exists x' \in \Omega : x^k \succcurlyeq x' \xrightarrow{\text{обрываем } x'} \Omega$

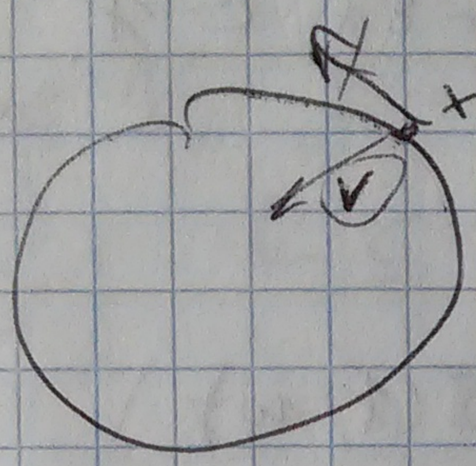
$\Rightarrow \Omega = \{x^k\} \cup \Omega$!

2) $\exists x \in \Omega : x \succcurlyeq x^k \Rightarrow \Omega$.

3) $\Omega := \Omega \cup \{x^k\}$



$\exists$ X - ~~вып~~ вып. мн-во.



$x^0 \in X$

Опр. α - допустимое направление в т. x^0 для X, если

$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \quad x_0 + \varepsilon\alpha \in X.$

$\mathcal{L}(x^0)$ - все эти направления.

Теорема 3.3

$\exists$ X - вып. полиэдр,

$\exists$ все $w_i(x)$ вогнуты на X,

$w_i(x)$ непр. диффер-мы в $\mathcal{O} \supset X$.

Тогда $x^0 \notin S(X, w) \iff \exists \alpha \in \mathcal{L}(x^0) :$

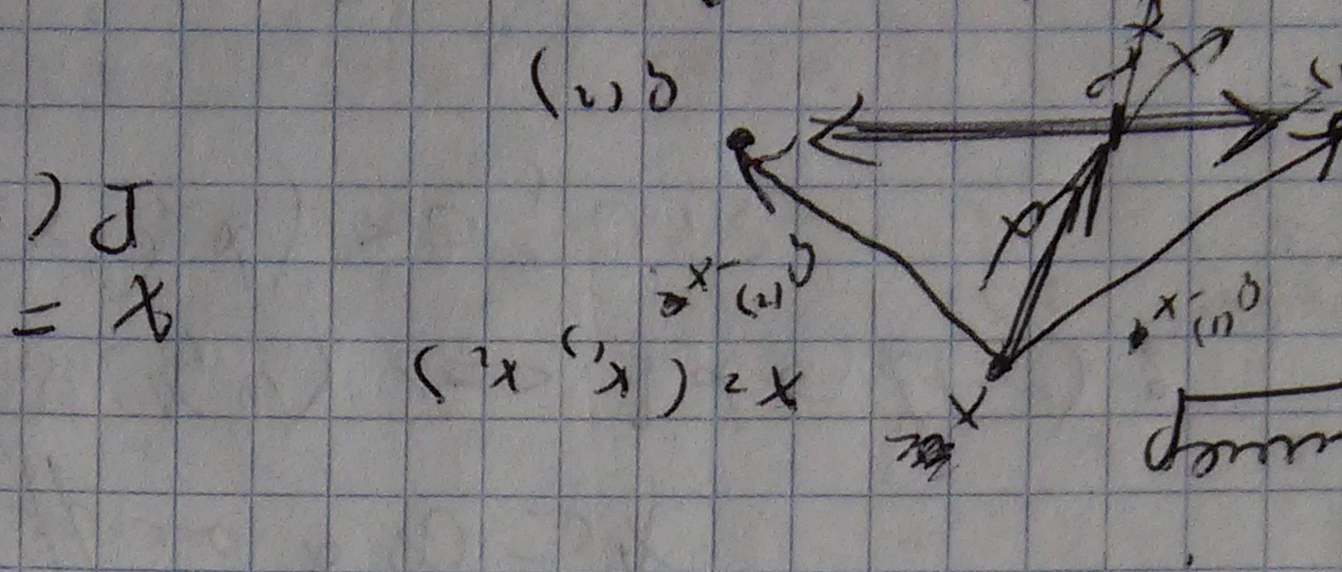
$(w_i'(x^0), \alpha) > 0, \; i = \overline{1,s}.$ (2).

Док-во:

$\exists x^0 \notin S(X, w) \Rightarrow \exists \alpha$.

$\exists x \in X : w_i(x) > w_i(x^0) \quad \forall i = \overline{1,s}.$

$$\chi = \varepsilon^2$$
$$P(\chi, u)$$



$$W_1(x) = -|Y - q^{(1)}|^2$$
$$W_2(x) = -|x - q^{(2)}|^2$$

$$\frac{1}{2} W_i(x) = \overline{\text{выпуклая функция}}$$

$$(W_i'(x^0; x) > 0$$

$$\exists x^0 \quad \exists x \in \chi(x^0) \qquad (2) \Rightarrow (1) + \text{по } \beta(x, u)$$

$$\exists \varepsilon: \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon]$$

$$\forall i \; W_i(x^0 + \varepsilon x) - W_i(x^0) \geq (W_i'(x^0 + \theta \cdot \varepsilon x); \varepsilon x)$$

$$x^0 + \varepsilon x = x^0 + \varepsilon(y - x^0) = (1-\varepsilon)x^0 + \varepsilon y \in X$$

$$0 < W_i(x) - W_i(x^0) \leq W_i'(x^0; y - x^0)$$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

$$\exists \alpha > 0 - \text{фиксированное}:$$



$$W_1'(x) = -2(x - q^{(1)}) = 2(q^{(1)} - x)$$

$$W_2'(x) = -2(x - q^{(2)}) = 2(q^{(2)} - x).$$

§ Принятие решений в/р порядка отношения.

$x \in X$.

Опр. $R \subseteq X \times X$ - бинарное отношение

$(x, x') \in R \sim x R x'$

$(x, x') \notin R \sim x \bar{R} x'$.

Опр. R под-ва:

а) рефлексивно, если $x R x$, $\forall x \in X$

б) антирефлексивно, если $x \bar{R} x$, $\forall x \in X$ (напр. $\geq$)

в) симметрично, если $x R x' \Rightarrow x' R x$, $\forall x, x' \in X$ (напр. $=$)

г) ~~анти~~асимметрично, если $x R x' \Rightarrow x' \bar{R} x$, $\forall x, x' \in X$ (напр. $>$)

д) транзитивно, если $x R x' R x'' \Rightarrow x R x''$

е) ациклично, если ~~не~~ $\nexists\, x^1 R x^2 R \dots R x^k R x^1$

~~R асимметр. $\Rightarrow$ R антирефл.~~ 2) $\Rightarrow$ б)

~~2)~~ $\Rightarrow$ е) $\Rightarrow$ 2).

Опр. R X задано

$C(X,R) = \{ x' \in X \mid \forall x \, R\, x' \Rightarrow x' R x \}$ (1)

R-максимальный.

$C(X,R) = \{ x' \in X \mid \nexists x \in X : x R x' \}$.

$\exists R = \succcurlyeq_C : C(X, \succcurlyeq) = \underline{P}(X, \omega), C(X, \succcurlyeq) = S(X, \omega)$

доказать

$x' \in (1) \Rightarrow x' \in (2)$.

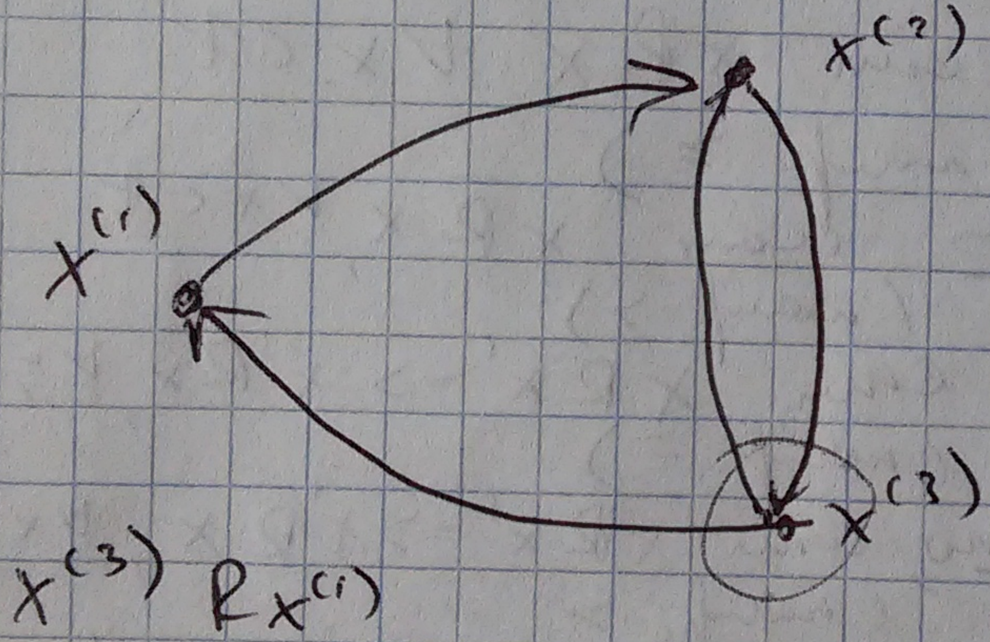
$x' \notin (2)$ $\exists x \in X : x R x' \Rightarrow x' \bar{R} x$

$\| \; x' \in (1)$

$x' R x$.

$x' \in (2) \Rightarrow x' \in (1)$.

$\nexists x : x R x'$.



$C(X,R) = \{ x^{(3)} \}$.

	предпочтения: М	Л
удержим: x^1	3	5
x^2	5	4
x^3	4	5

М рав. Л.:

$x^2 \sim x^3 \succcurlyeq x^1$.

М важнее Л.:

x^2 лучше x^3. $\succcurlyeq x^1$.

1. Банахово?

[redacted] ?

$X \subseteq \mathbb{X}$, $W(x) = (W_1(x), \dots, W_s(x))$

$\forall i,j$ $\max\limits_{x \in X} W_i(x) = \max\limits_{x \in X} W_j(x)$

$\min\limits_{x \in X} W_i(x) = \min\limits_{x \in X} W_j(x)$

$\exists i$ $W_i(x) \le b_i$, $a_i > 0$ $\Rightarrow$ получим однородный вид.

$\forall y = 1, \dots, s$.

A_1 $\quad \tau A_1 t$ - τ и t равноудал.

A_2 $\quad \tau A_2 t$ - $\tau \overset{c}{\succ} t$

$1\ A_1\ 2\ A_2\ 3\ A_1\ 1 \Rightarrow$ [redacted] цикл.

$\phi \quad y \quad \tau \phi t$

$\exists \tau B_1 i_1 B_2 \dots i_{k-1} B_k t$

$B_i = A_1$ или A_2, хотя бы одно - A_2.

$y = W(x) \in E^s$.

$Y = W(X)$

$y, y' \in E^s$

$y P y' \Leftrightarrow \begin{cases} y_i \ge y_i' \ \forall i = \overline{1,s}, \\ y_i \ne y_i'. \end{cases}$

$z \neq t \in y \quad y \quad y^{z+}$

$\exists z A_1 t.$

$\Rightarrow$ Введем $\in S'_{z+}$: $y S'_{z+} y' \langle z \rangle y' \cdot y^{z+}$.

(не обязательно, так как можно по-другому y')

$\exists z A_2 t$: T_{z+} : $y T_{z+} y' \Leftrightarrow y' \cdot y^{z>}$, $y_z > y_t$. $z >$

R: $y R y' \Leftrightarrow$ Существует вид:

$y H_1 z^1 H_2 z^2 \ldots z^{k-1} H_\ell z^\ell \ldots z^{n-1} H_k y'$

$H_\ell \in \{P, S'_{z+}, \exists z A_1 t; T_{z+}, \exists z A_2 t\}$

и не все $= S'_{z+}$.

Лемма 5

R транз. и аудитивно.

Док-во

транз.:

$y R y' R y''$ — отрез, отрез, следует $\Rightarrow$ ок.

аудитив:

$\forall n \exists y H_1 z^1 \ldots z^{\ell-1} H_\ell z^\ell \ldots H_k y.$

$\forall$ случаи: 1) $\exists \exists \ell : H_\ell = P$

$\sum_{i=1}^{s} y_i \geq \sum_{i=1}^{s} z_i^1 \geq \ldots \overset{\text{Парето}}{>} \ldots \geq \sum_{i=1}^{s} y_i \Rightarrow \underline{\underline{n!}}$!!

$\Rightarrow \exists\, \forall \ell \quad H_\ell \neq P. \Rightarrow \exists\, T_{\ell+}$.
$\exists H_1 = T_{1+} \to \ell A_2 t$

$\gamma_t = \{ i \mid i \Phi t \}$

$\ell \in \gamma_t$, т.е. $\ell A_2 t \to \ell \Phi t$.

$t \notin \gamma_t$, т.е. $t \bar{\Phi} t$.

$H_\ell = \bigcap_{i \ell j \ell} T_{i \ell j \ell}$.

Докажем, что $j\ell \in \gamma_t \Rightarrow i_\ell \in \gamma_t$:

$i_\ell A_1 j_\ell$ или $i_\ell A_2 j_\ell$.

$i_\ell A_1 j_\ell \; \Phi t \to i_\ell \in \gamma_t$

$i_\ell A_2 j_\ell \; \Phi t \to i_\ell \in \gamma_t$ $\Rightarrow$ верно.

$\to$ 1) $i_\ell, j_\ell \in \gamma_t$

2) $i_\ell, j_\ell \notin \gamma_t$

3) $i_\ell \in \gamma_t, j_\ell \notin \gamma_t$.

1), 2) $\to \sum_{i \in \gamma_t} z_i^{\ell-1} = \sum_{i \in \gamma_t} z_i^{\ell}$.

3) $\to i_\ell A_2 j_2$, т.к. $\boxed{\Pi}$: $i_\ell A_1 j_\ell \Rightarrow j_\ell A_1 i_\ell \; \Phi t \Rightarrow$
$\Rightarrow j_\ell \in \gamma_t \Rightarrow$?!

$H_\ell = \bigcap_{i_\ell j_\ell} z_{i_\ell}^{\ell-1} \to z_{j_\ell}^{\ell-1}$

$\sum_{i \in \gamma_t} z_i^{\ell-1} \to \sum_{i \in \gamma_t} z_i^{\ell}$

$\Rightarrow \sum_{i\in y_+} y_i \geq \sum_{i\in y_+} z_i' \geq \dots \geq \sum_{i\in y_+} y_i \Rightarrow ?!$

$\Rightarrow$ #

$\Rightarrow$ (#).

$P(x,w) = \{ x^1, \dots, x^n y \}$

$P(Y) = \{ y^1 = w(x^1), \dots, y^n; w(x^n) \}$ - конечное.

$P \quad C(P(Y), R) \neq \emptyset$.

yPy'.

$\forall$ т.с.: $\exists A_1 = y \times y, \; A_2 = \emptyset$.

$y \to \Theta(y) = (\theta_1(y), \dots, \theta_s(y))$, $\theta_1(y) \geq \theta_2(y) \geq \geq \theta_s(y)$.

$\theta_1(y) = \max_{i=\overline{1,s}} y_i$

Лемма 2

$\exists\, y P y'$. $y_i \geq y_i'$, $i = \overline{1,s}$, $y \neq y'$

Тогда $\Theta(y) \; P \; \Theta(y')$.

Док-во:

$\theta_1(y) = \max_{i=\overline{1,s}} y_i \geq \max_{i=\overline{1,s}} y_i' = \theta_1(y')$.

$\forall\, \theta_i(y) \geq \theta_i(y'), i = \overline{1,k}$; $\theta_{k+1}(y) < \theta_{k+1}(y')$.

$\theta_s(y) \leq \dots \leq \theta_{k+1}(y) < \theta_{k+1}(y') \leq \dots \leq \theta_1(y')$.

$\geq y_i'$, $i = \overline{s}$; $\geq y_{k+1}'$; $< y_{k+1}'$

верно $s-k$; верно $k+1$

верно $s+1$. $\Rightarrow ?!$.

Утв.

$A_1 = y \times y$; $A_2 = \varnothing$.

Тогда $y R y' \Leftrightarrow \Theta(y) \, P \, \Theta(y')$.

Доказ-во:

$\Rightarrow$: $y R y'$.

$y H_1 z^1 H_2 \dots z^{k-1} H_k y'$.

$H_e = P, S_{z+} \swarrow z_{e-1} H_e z^e$.

Сам $H_e = S^r_{ieje}$,

т.к. $\Theta(z^{e-1}) \cdot \Theta(z^e)$

Сам $H_e = P$, т.к.

т.к. $\Theta(z^{e-1}) \, P \, \Theta(z^e)$.

$\Rightarrow \Theta(y) \, P \, \Theta(y')$. $\#$.

$\Leftarrow$: $\Theta(y) \, P \, \Theta(y')$.

$y \, S^r_{i,j_1} z^1 \dots z^z \Theta(y) \, S_{i z+1, j z+1} z^{z+1} \dots y'$

$\Rightarrow y R y'$.

$\#$

Пример

1) $P(X, W) = \{x^1, x^2, x^3, x^4, x^5\}$.

y^1	3	5	3
y^2	4	4	3
y^3	5	3	2
y^4	2	3	5
y^5	4	2	4
	1ый прит.	2ой	3ий

упорядочить и произвести сравнение по Парето.

$\Theta(y^1)$	5	3	3
$\Theta(y^2)$	4	4	3
$\Theta(y^3)$	5	3	2
$\Theta(y^4)$	5	3	2
$\Theta(y^5)$	4	4	2

1ая лучше

1ая лучше

2ая лучше.

2) $P(X, W) = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$.

y^1	5	5	4	4
y^2	5	4	5	4
y^3	5	4	4	5
y^4	4	4	5	5

$A_1 = \{(\overset{\text{прит.}}{1}, 3); (3,1)\} \cup \{(i,i), i=1,2,3,4\}$.

$A_2 = \{(2,4), (2,3)\}$.

построим ядро бинарного отношения

$y_1 T_{24} y^3$ ($y^1 = y^3$ или $y_2^3 \leftrightarrow y_4^3$ и ?).

$y_1 T_{24} y^3 S_{13} y^4$

$\Rightarrow y^1 R y^3$; $y^1 R y^4$.

$y^1 T_{23} y^2 \Rightarrow y^1 R y^2$.

$\Rightarrow$ одр. $R = C(\Pi(Y), R) = \{y^1\}$.

§ 12 Матем. модель операций.

06.04.15

Опр. Операция – совокупность мероприятий, направленных на достижение нек. цели.

Оперирующая сторона – те, кто пытается ↑.

Исследователь операций – входит в ↑, он составляет мат. модель и дает рекомендации.

Активные средства (ресурсы)

контролируемые факторы $x \in M_0$.

неконтролируемые факторы → неопред. факторы

→ случайные факторы.

неопред. факторы – знаем только область: $y \in N_0$ ($y \in W \subset N_0$)

а) стратегия противника

б) природа

в) неясность целей

~~пример~~:

Пример в):

$$W(x) = (w_1(x), \dots, w_s(x))$$

$$F_1(\lambda, x) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i w_i(x)$$

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \Lambda = \{\lambda \in E^s \mid \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1,\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s > 0\}.$$

Случайные факторы: случ. величины: $z \in Z$,

есть закон распределения $\theta \in \Theta$

1) $\Theta = \{\theta_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{L}\}$.

2) $\Theta = \{\theta \mid a_i \leq \int_Z a_i(z)\, d\theta(z) \leq \bar{a}_i,\ i = \overline{1,l}\}$.

$x \in M,\ y \in W,\ z \in Z$.

критерий эффективности

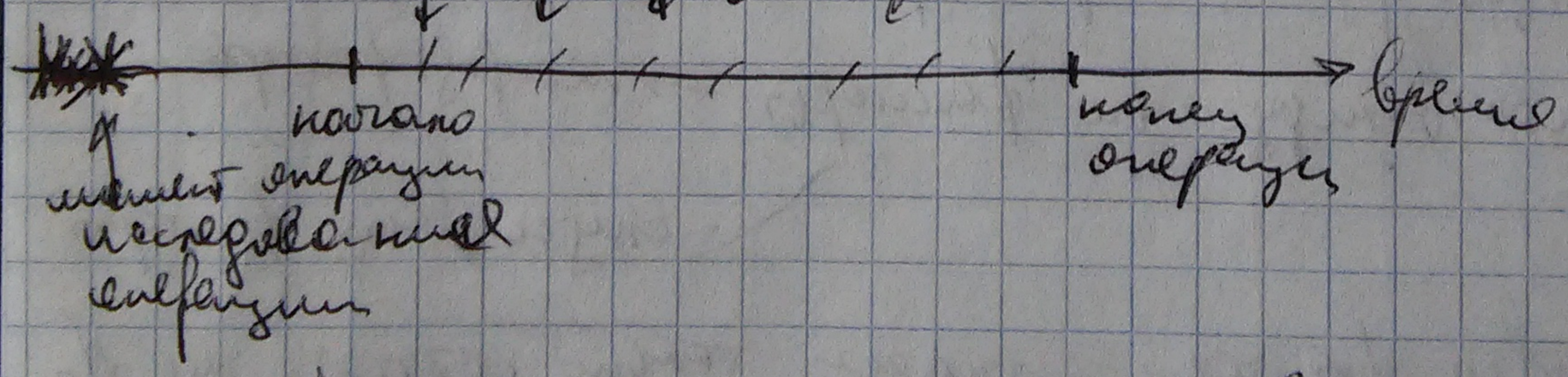
$F(x, y, z)$ опред. на $M_0 \times W \times Z$.

старания → max.

строгости

информация о неконтр. факторах

операция



информационная гипотеза – в какое время и какая информация поступает о неконтр. фак.

$\tilde{x}: \omega \times Z \to M_0$, $\tilde{x} \in M$.

Пример

1) $M = M_0$, $\tilde{x} \equiv x$.

2) y $\quad y: \omega \to M_0$, $\tilde{x}(y)$

$M_{\text{н.о.}} = \{x^2 \mid x^2 : \omega \to M_0\}$

3) $\tilde{x}: \omega \times Z \to M_0$, $\tilde{x}(y, z)$

$\tilde{M}$.

4) $M \subsetneq M \subsetneq M_{\text{н}}$

$y: (y_1, \dots, y_n)$ - кон-во координат. отображений

$\sum_{j=1}^{n} y_j$ - складывает в каждом операции.

5) опер. $\tilde{x}(y) = f(\sum_{j=1}^{n} y_j)$

~~f~~.

$x \in M_0$, $y \in \omega \subseteq \omega_0$, $z \in Z$, $\theta \in \Theta$.

$F(x, y, z)$ $\quad M_0 \times \omega \times Z$.

$\tilde{x} \in M$, $M_0 \subseteq M$.

§3. Опт. сов. в операции.

параметр. включая нрат.

$\forall \tilde{x} \in M \quad W(\tilde{x})$ - оценка эффективности совокупности.

Опр. $\hat{x}^0 \in M$ - опт. если

$$w(\hat{x}^0) = \max_{\hat{x} \in M} w(\hat{x})$$

Предположения

1) y - либо природная неопред-ть, либо
стат. игра против либо с противн. ~~игра~~
либо с неизвестными интересами

$$\left(f_n(x, y, z) = -F(x, y, z) \right)$$

2) ~~X~~ игрок не знает z.

3) $\exists$ распределение вероятности природы по z.

$$w(\hat{x}) = \inf_{\theta \in \Theta} \inf_{y \in W} \int_Z F(\hat{x}(y, z), y, z) d\mathcal{Q}(z) \quad (1)$$

если ~~у~~ $\forall z \in Z$, то

$$w(\hat{x}) = \inf_{\theta \in \Theta} \int_Z \inf_{y \in W} F(\hat{x}(y, z), y, z) d\mathcal{Q}(z)$$

~~W~~ Покажем, что $w(\hat{x}) \leq w(\hat{x})$:

$\forall \theta \in \Theta, \forall y \in W$

$$\inf_{\theta \in \Theta} \int_Z F(\hat{x}(y, z), y, z) d\mathcal{Q}(z) \geq \int_Z \inf_{y} F(\hat{x}(y, z), y, z) d\mathcal{Q}(z)$$

$\Rightarrow$ доказано.

Пример

1, ..., n моментов времени (торговые дни)

$k < n$ бумаг

пор. по одной акции в каждый момент времени. $q < b$ стр-я

$x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i = 0,1$, $i = \overline{1,n}$

$\sum_{i=1}^{n} x_i = k$.

$x \in M_0$ - стр-я акций.

$y = (y_1, \dots, y_n) \in \omega = \{ y \mid a \le y_i \le b \}$.

$\hat{x}: \hat{x}_i(y_1, \dots, y_i)$, $\hat{x} \in M$.

$F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

$W(\tilde{x}) = \max$. при оптимальном.

$F_1(x,y) = \dfrac{F(x,y)}{\max\limits_{x \in M} F(x,y)}$.

если бы знали y

Оценка эффективности стат. опыт.

$M = M_0$, макс. гарант. рез-т.

$F_2(M) \triangleq \max\limits_{\hat{x} \in M} W(\hat{x}) = W(\tilde{x}^0)$.

$F_2(M_0) = \max\limits_{x \in M_0} \inf\limits_{\theta \in \Theta} \inf\limits_{y \in \omega} \int_z F(x,y,z)\, d\theta(z)$.

Опр. Ψ - опт. по M_0

$\exists$ противник неизвестных.

$$W(\varphi) = \inf_{\theta \in \Theta} \inf_{y \in M} \int_Z \int_{M_0} F(x, y, z)\, d\varphi(x)\, d\theta(z).$$

$\exists$ известно.

$\tilde{x} : M \times Z \to M_0$.

$\tilde{x}(y, z)$ - оптимальное по z.

$$\bar{F}(\tilde{x}, y, \theta) = \int_Z F(\tilde{x}(y, z), y, z)\, d\theta(z).$$

Опр. отв. $\tilde{x}_0 \in M$ - абсолютно оптимальное, если

$$\max_{\tilde{x} \in M} \bar{F}(\tilde{x}, y, \theta) = \bar{F}(\tilde{x}_0, y, \theta).$$

$\exists \tilde{x} : \tilde{x}(y)$.

$\exists M_0 \subseteq M_{\text{бм}}$

Теорема: $\max_{\tilde{x} \in M} \bar{F}(\tilde{x}, y, \theta) = \max_{x \in M_0} \bar{F}(x, y, \theta)$ (3)

Берем $\forall \tilde{x} \in M$: $\bar{F}(\tilde{x}, y, \theta) =$

$= \int_Z F(\tilde{x}(y), y, z)\, d\theta(z) = \bar{F}(\tilde{x}(y), y, \theta) \leq$ ($\tilde{x}(y) \in M_0$)

$\leq \max_{x \in M_0} \bar{F}(x, y, \theta) \leq \max_{\tilde{x} \in M} \bar{F}(\tilde{x}, y, \theta)$

$\Rightarrow$ (=) возьмем max? $\Rightarrow$ все $\leq \to$ (=) $\Rightarrow$ верно.

Пример ((3) не верно, если $\tilde{x}(y,z)$):

$$\exists f(x,z) = -(x-z)^2,$$

$d\theta(z)$.

$x \in \Lambda_0 = [0,1]$

$z \in Z \cdot [0,1]$, $\theta(z) = z$ (т.е. равномерное распределение)

$\tilde{M}$: $\tilde{x}(z)$

$$\bar{F}(x,\theta) = -\int_0^1 (x-z)^2 dz \leq 0.$$

если $\tilde{x}(z) = z$, то $= 0$.

$\max \bar{F}(x,\theta) \neq 0$ $\Rightarrow$ 3) не верно.
$x \in [0,1]$

Теорема 3.4

$\exists \tilde{x}_0 \in \tilde{M}$.

Тогда $\tilde{x}_0$ – оптим. и $F_2(M) = \inf\limits_{\text{гарантир.}} \max\limits_{y \in Y} \bar{F}(\tilde{x}_0, y, \theta)$ (4).

Док-во

Зафиксируем $\forall \tilde{x} \in M$.

$$W(\tilde{x}) = \inf_{y \in Y} \bar{F}(\tilde{x}, y, \theta) \leq \inf_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y, \theta) =$$

по опред.

$$= \inf_{y \in Y} \bar{F}(\tilde{x}_0, y, \theta) = W(\tilde{x}_0) \Leftrightarrow (4)$$

Теорема 3.5 (реализуемость)

1) $\exists \forall y \in W \max\limits_{x \in M_0} \bar{F}(x, y, \Theta)$

Тогда $F_\Gamma(M_H) = \inf\limits_{y \in W} \max\limits_{x \in M_0} \bar{F}(x, y, \Theta) = F_H(S)$.

2) $\exists \forall y \in W, \forall z \in Z$ функция $\max\limits_{x \in M_0} F(x, y, z)$

Тогда $F_2(\tilde{M}) = \inf\limits_{y \in W} \int\limits_Z \max\limits_{x \in M_0} F(x, y, z)\, d\Theta(z) = \tilde{F}$.

Доказательство

1) $x_0 \in M_0$:

$\hat{x}_0(y)$: $\max\limits_{x \in M_0} \bar{F}(x, y, \Theta) = \bar{F}(\hat{x}_0(y), y, \Theta)$. $\forall y \in W$

$+(3), (4) \Rightarrow$ #.

2) $\tilde{x}_0(y, z)$; $F(\tilde{x}_0(y, z), y, z) = \max\limits_{x \in M_0} F(x, y, z)$

Докажем: $\bar{F}(\hat{x}_0, y, \Theta) = \max\limits_{\tilde{x} \in \tilde{M}} \bar{F}(\tilde{x}, y, \Theta) =$

$= \int\limits_Z \max\limits_{x \in M_0} F(x, y, z)\, d\Theta(z)$ (7).

Зафиксируем $\forall \tilde{x} \in \tilde{M}$.

$\bar{F}(\tilde{x}, y, \Theta) = \int\limits_Z F(\tilde{x}(y, z), y, z)\, d\Theta(z) \leq$

$\leq \int\limits_Z \max\limits_{x \in M_0} F(x, y, z)\, d\Theta(z) = \int\limits_Z F(\tilde{x}_0(y, z), y, z)\, d\Theta(z) =$

$= \bar{F}(\tilde{x}_0, y, \Theta)$.

$\Rightarrow (7). \Rightarrow (6)$, т.к. $(4)+(7) \Rightarrow (6) \Rightarrow \#$

(##).

Пример

$i \in M_0 = \{1, 2, 3\}$,

$j \in \omega = \{1, 2, 3, 4\}$

$$\widetilde{F}: \quad (F(ij))_{3\times 4} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \Big\} \max$$

$\min$ по j

1) $M = M_0$.

$\forall j \in \omega$ $\quad W(i) = \min\limits_{1 \le j \le 4} F(ij)$.

i^0; $W(i^0) = \max\limits_{i=\overline{1,3}} W(i)$

$i^0 = 3$, $F_2(M_0) = 1$.

Ищем M_a и i_a?

$F(i_a, j) = \max\limits_{i=\overline{1,3}} F(i,j)$, $j = \overline{1,4}$.

т.е. $F(i_a, j) \ge F(i,j)$ $\forall i, j$.

(т.е. i_a доминирует остальных) $\Rightarrow$ нет.

2) $d_{a(q)} =$

2) $M_2 R_4$ $\quad \tilde{i}(\tilde{i}_j)$.

$$F_2(M_4) = \min_{j=\overline{1,4}} \max_{i=\overline{1,3}} F(i,j) = F_4$$

	-1	2
	3	2
	4	2
max →	4	2

5	2
1	

$\to 1$

$F_4 = 2$.

$\tilde{i}^0$: $w(\tilde{i}^0) = \min_{1 \le j \le 4} F(\tilde{i}^0(j), j) = 2$.

т.к. $F(\tilde{i}^0(j), j) \ge 2$ для $\forall j = \overline{1,4}$.

$\tilde{i}^0(1) = 2,3$
$\tilde{i}^0(2) = 1,2,3$
$\tilde{i}^0(3) = 1,3$
$\tilde{i}^0(4) = 1,2$.

} комбинируем → опт. реш. (всего 24 набора)

абсолютно опт:

$\tilde{i}_a$: $F(\tilde{i}_a(j), j) = \max_{i=\overline{1,3}} F(i,j)$

$\tilde{i}_a(1) = 3$
$\tilde{i}_a(2) = 1,2,3$
$\tilde{i}_a(3) = 1$
$\tilde{i}_a(4) = 1,2$

} комбинируем → абс. опт. реш. (всего 6 наборов).

3) $W_1 = \{1, 2\}$, $W_2 = \{3, 4\}$.

$j \in W_1$ или W_2.

$\tilde{i}(j) = \begin{cases} i_1, & j \in W_1 \\ i_2, & j \in W_2. \end{cases}$ → было 9 слов. ($|M| = 9$)

В M есть одс. отн. эквив. $\tilde{\tau}_q(j)$:

$i_1^q = 3$

$i_2^q = 1$

→ по т. 3.4 $F_2(M) = \min\limits_{j=\overline{1,4}} \max\limits_{i=\overline{1,3}} f(i,j) = f_4 = 2.$

$\tilde{i}^0(j)$: $i_1^0 = 2, 3$

$i_2^0 = 1$

§14 Необх. усл-е для экстремума (огр.) функ.

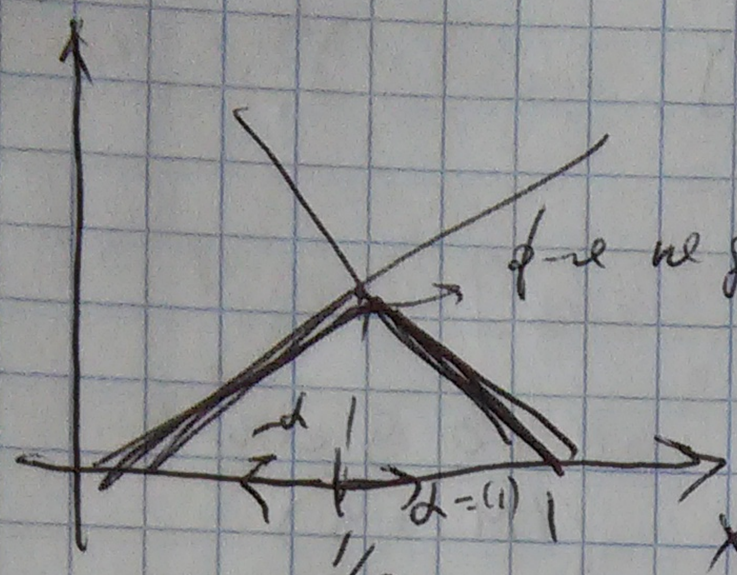
$\max\limits_{x \in M_0} W(x) = W(x^0)$

$W(x) = \min\limits_{y \in W} F(x, y)$.

$x = (x_1, \dots, x_m) \in E^m$, $\alpha \in E^m$.

если $h(x)$ - неп. д-е, то

$\dfrac{dh(x)}{d\alpha} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+0} \dfrac{h(x + \varepsilon\alpha) - h(x)}{\varepsilon} = (h'(x), \alpha)$.



ф-я не диффер, но $\exists \frac{dh(x)}{d\alpha_1}$ где

$\alpha_2(1), (-1)$

$$\frac{dh(\frac{1}{2})}{d\alpha} = \begin{cases} -1, & \alpha_2(1) \\ -1, & \alpha_2(-1) \end{cases}$$

Теорема 3.6

$\exists D \subset E^m$; W - компакт. метр. пр-во.

$\exists F(x,y)$, $F'_{x_i}(x,y)$, $i = \overline{1,m}$ непр. на $D \times W$.

Тогда $\forall x \in D$ для $\forall \alpha \in E^m$

$$\exists \frac{d}{d\alpha}\left[\min_{y \in W} F(x,y)\right] = \min_{y \in W(x)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x,y), \quad (1)$$

где $W(x) = \operatorname{Arg}\min_{y \in W} F(x,y)$

Доказ-во:

$\forall x, \forall \alpha$. $x \to x^\varepsilon$ по α, $x^\varepsilon = x + \varepsilon_\varepsilon \alpha$, $\varepsilon_\varepsilon \to 0$.

$\forall y \in W(x)$ $\exists y^\varepsilon \in W(x^\varepsilon)$

$$\frac{W(x^\varepsilon) - W(x)}{\varepsilon_\varepsilon} \leq 0$$

$$\geq \frac{F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) - F(x,y)}{\varepsilon_\varepsilon} \geq \frac{F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) - F(x^\varepsilon, y) + F(x^\varepsilon, y) - F(x,y)}{\varepsilon_\varepsilon} \geq$$

$$\geq \frac{F(x^\varepsilon, y) - F(x,y)}{\varepsilon_\varepsilon} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(x_i^\varepsilon - x_i) F'_{x_i}(x + \theta_\varepsilon(x^\varepsilon - x), y)}{\varepsilon_\varepsilon} \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x + \theta_\varepsilon(x^\varepsilon - x), y) \quad \forall \varepsilon, \forall y \in W(x).$$

2) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{W(x^k)-W(x)}{\varepsilon_k} \geq \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x,y) \quad \forall y \in W(x)$.

$\Rightarrow$ $\min\limits_{y\in W(x)}$ (2).

через ε_k:

$\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{W(x^k)-W(x)}{\varepsilon_k} \geq \min\limits_{y\in W(x)} \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x,y)$ (3)

Ω.

(2), (3) $\Rightarrow$ $\lim\exists \Rightarrow$ (1).

), (1)

доказ (3):

$\exists \varepsilon_k : \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{W(x^{k_\ell})-W(x)}{\varepsilon_{k_\ell}} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{W(x^k)-W(x)}{\varepsilon_k}$.

$y^{k_\ell} \in W(x^{k_\ell}) \subseteq \Omega \Rightarrow$ выделим сх-ю п/посл-ть.

$y^{k_\ell} \to y^* \in \Omega$.

$F(x^{k_\ell}, y^{k_\ell}) \leq F(x^{k_\ell}, y) \quad \forall y \in \Omega$.

$\Rightarrow F(x, y^*) \leq F(x, y) \quad \forall y \in \Omega$.

$\dfrac{W(x^{k_\ell})-W(x)}{\varepsilon_{k_\ell}} = \dfrac{F(x^{k_\ell}, y^{k_\ell})-F(x,y^*)}{\varepsilon_{k_\ell}} \geq 0$

$= \dfrac{F(x^{k_\ell}, y^{k_\ell}) - F(x, y^{k_\ell}) + F(x, y^{k_\ell}) - F(x, y^*)}{\varepsilon_{k_\ell}} \geq$

$$\frac{F(x^{ke}, y^{ke}) - F(x, y^{ke})}{\varepsilon_{ke}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F'_{x_i}(x + \theta_{ke}(x^{ke} - x), y^{ke}).$$

$\theta_{ke} \in [0,1]$

$k \to \infty$: $\frac{\varepsilon_{ke}}{\varepsilon_k} \quad \frac{w(x^k) - w(x)}{\varepsilon_k} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x, y^k) \to$

$\to \max_{y \in W(x)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x, y) \Rightarrow (3) \Rightarrow \#.$

(A).

$\varepsilon \to 0 \quad w(x) \to \{y(x)\}$

$W(x) = F(x, y(x))$ - функция:

$$\frac{dW(x)}{dx_i} = F'_{x_i}(x, y(x))$$

Пример $x = (x_1, x_2, x_3)$

$$W(x) = \min_{j=1,3} f_j(x)$$

$f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$f_2(x) = x_2^{10}$

$f_3(x) = \cos(9x_1^2) + x_2 + \cos x_3.$

$x^0 = (2, -2, 1), \quad \alpha = (-3, 2, -1).$

$\omega = \{1,2,3\}$

$\omega(x^0)$:

$f_1(x^0) = g$

$f_2(x^0) = g^{10}$

$f_3(x^0) = g$

$\Rightarrow \omega(x^0) = \{1,3\}$

$f_1'(x^0) \cdot dx^0 = \{4,-4,2\}$

$f_3'(x^0) = (0,1,10)$

$(\alpha, f_1'(x^0)) = -12 - 8 - 2 = -22.$

$(\alpha, f_3'(x^0)) = 8 - 10 = -8$

$\frac{dw(x^0)}{d\alpha} = \min[-22,-8] = -22.$

Следствие Т. 3.6:

$\exists$ в условиях Т. 3.6 $M_0 \subset Z$

$\exists x^0$ - локальный сбоя. M_0

Тогда $\forall x^0$ вып.

$$\sup_{\alpha \in \Lambda(x^0)} \min_{y \in \omega(x)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x^0, y) \leq 0. \quad (4)$$

Доказ (б):

$\forall \alpha \in \mathcal{L}(x^0)$.

$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 \quad x_0 + \varepsilon\alpha \in K_0$.

$$\frac{W(x_0^0 + \varepsilon\alpha) - W(x^0)}{\varepsilon} \le 0. \qquad \varepsilon \to 0+.$$

$\varepsilon \to 0$:

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{L}(x^0)} \min_{y \in W(x^0)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F_{x_i}'(x_i^0, y) \le 0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{L}(x^0)$$

$\Rightarrow$ (4).

Теорема 3.2

$K_0 = [a, b] \subset \mathcal{O} \subset E^1$, $y \in W$ - конечное мн-во.

$F(x, y)$, $F_x'(x, y)$ непр. на $\mathcal{O} \times W$.

Тогда либо

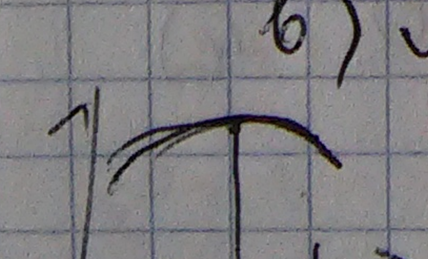
а) $x^0 = a$, либо $x^0 = b$

либо

б) $\exists y^1 \ne y^2 \in W(x^0)$

либо

в) $W(x^0) = \{y^1\}$, $F_x'(x^0, y^1) = 0$.



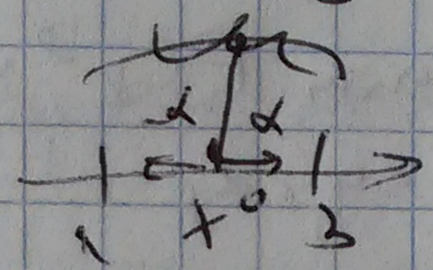
Док-во:

$\exists$ а) $\vee$ б) $\Rightarrow$ всё верно.

$\exists$ $\bar{а}$) $\wedge$ $\bar{б}$).

$\bar{а}$) $\Rightarrow$ ~~x^0~~ $a < x^0 < b$.

$\bar{б}$) $\Rightarrow$ $\omega(x^0) = \{y'\}$.



d: $1 \cdot F'_x(x^0, y') \le 0$

$-\alpha$: $(-1) \cdot F'_x(x^0, y') \le 0$ $\Big\} \Rightarrow F'_x(x^0, y') \ge 0$.

Следствие Т. 3.7

$\exists$ в условиях Т. 3.7 $\omega = \{y \in E^m \mid c_j \le y_i \le d_j, j = \overline{1,m}\}$

$\exists\, F'_{y_j}(x, y)$ ~~нет~~ на $M_0 \times W$, $j = \overline{1,m}$.

Тогда для $x^0 \in M_0 = [a, b]$ функция:

либо

1) $\exists\, y' \in \omega(x^0)$: $F'_x(x^0, y') \cdot (x^0 - a)(x^0 - b) = 0$

и $F'_{y_j}(x^0, y') \cdot (y_j' - c_j)(y_j' - d_j) \ge 0$, $j = \overline{1,m}$

либо

2) $\exists\, y' \ne y^2 \in \omega(x^0)$: $F'_{y_j}(x^0, y') (y_j' - c_j)(y_j' - d_j) \cdot$
$\cdot F'_{y_j}(x^0, y^2)(y_j^2 - c_j)(y_j^2 - d_j) \ge 0$, $j = \overline{1,m}$

и $F(x^0, y^1) = F(x^0, y^2) = w(x^0)$.

Док-во:

$\exists x^0$ - макс. мин. сбл.

$\Rightarrow$ Т. З. Ф : а или б или в.

а) $\vee$ в) $\Rightarrow$ б).

$y^1 \in w(x^0) \Rightarrow \min\limits_{c_j \le y_j \le d_j} F(x^0, y^1 // y_j) = F(x^0, y^1), j=\overline{1,n}$

$\Rightarrow F_{y_j}(x^0, y^1) = 0$

б) $\Rightarrow$ г). (аналогично).

(#)

1) $x^0, y_j^k, j=\overline{1,n}$ $\exists n+1$ мерн. и $n+1$ уравн.

2) $x^0, y_j^1, y_j^2, j=\overline{1,n}$ $\exists 2n+1$ мерн. и $2n+1$ уравн.

$\Rightarrow M_0^* \quad w^* \quad y^1, y^2$

$x^0 \in \operatorname{Arg\,max}\limits_{x \in M_0^*} \min\limits_{y \in w^*} F(x, y)$

13.04.15

§15. Задача опт. распределения ресурсов.

n пунктов, $i=\overline{1,n}$

A ресурсов.

$f_i(t)$ - эффект от вложения ресурса.

$x=(x_1,\dots,x_n)$ - сколько вложим.

A - либо всем целиком, либо дискретный

$$M_0=\{x\in E^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = A,\ x_i\geq 0,\ i=\overline{1,n}\}$$

$$M_0'=\{x\in M_0 \mid x_i\in \mathbb{Z},\ i=\overline{1,n}\}.$$

Задача:

$$\max_{x\in M_0}\min_{i=\overline{1,n}} f_i(x_i)=\min_{i=\overline{1,n}} f_i(x_i^0) \quad (\text{I}).$$

считаем, что $f_i(t)$ неуб. и непр., $t\in[0,A]$.

$$f_1(0)\leq f_2(0)\leq\dots\leq f_n(0).$$

Теорема 3.8 (принцип уравнивания Гермейера)

$\exists\, x^0$ - опт. распр-е ресурсов в (I) $\Leftrightarrow$

Тогда $\exists\, k\in[0,n]$:

$$\begin{cases} f_1(x_1^0)=\dots=f_k(x_k^0)<f_{k+1}(0) & (\text{I}) \\ x_i^0=0,\ i=\overline{k+1,n}. \end{cases}$$

Если $f_1(\theta) = \dots = f_n(\theta)$, то к-т.

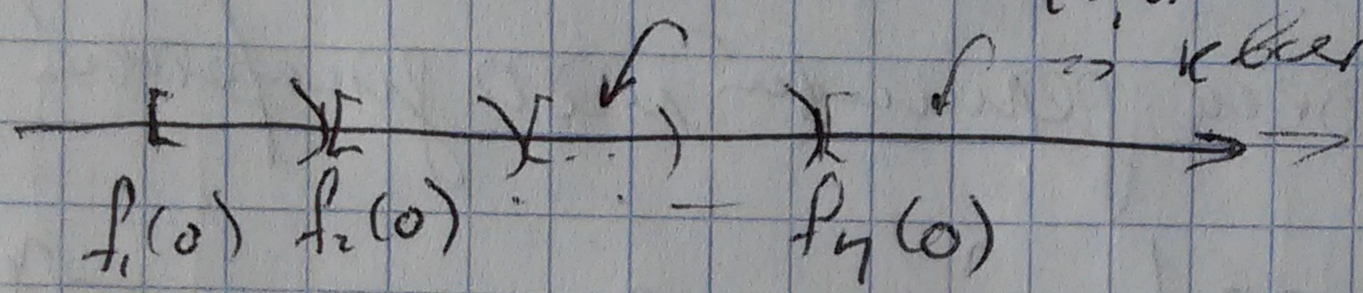
~~опт-ран~~

Опт. ранг в ресурсов в этой задаче (!).

Док-во:

необх-ть; x^0 - опт. в $(\overline{I}) \Rightarrow (\Gamma)$.

Выберем $k: f_k(\theta) = \min\limits_{i=\overline{1,n}} f_i(x_i^0) < f_{k+1}(\theta)$ (2).



$\Rightarrow$ к-во ресурсов $\neq$.

покажем, что $x_i^0 > 0$, $i = \overline{k+1, n}$.

$\boxed{\Pi}$: $\exists\, i_1 \geq k+1 : x_{i_1}^0 > 0$.

Z_{i_1} Z_i

$Z: \quad z_i = \begin{cases} x_{i_1}^0 - \varepsilon & i = i_1 \\ x_i^0 + \frac{\varepsilon}{n-1}, & i \neq i_1 \end{cases}$, $\varepsilon > 0$.

$x_{i_1}^0 > 0$, $x_i^0 \to 0$

- новое распределение ресурсов.

$\sum = A$,

$Z \in M_0$.

$f_i(z_i) > f_i(x_i^0)$ $i \neq i_1$.

$f_{i_1}(z_{i_1}) = f_{i_1}(x_{i_1}^0 - \varepsilon) > f_{i_1}(0) \geq$

$\geq f_{k+1}(0) \overset{(2)}{\geq} \min\limits_{i=\overline{1,n}} f_i(x_i^0)$

т.е. мы $\min\limits_{i=\overline{1,n}} f_i(z_i) > \min\limits_{i=\overline{1,n}} f_i(x_i^0) \Rightarrow$?!

покажем, что $f_i(x_i^0) = \min\limits_{i=\overline{1,n}} f_i(x_i^0)$, $i=\overline{1,n}$

$\neg$: $\exists\, i_1$: $f_{i_1}(x_{i_1}^0) > \min\limits_{i=\overline{1,n}} f_i(x_i^0)$

Опять строим z и приходим к ?!:

2) $f_{i_1}(x_{i_1}^0 - \varepsilon) > \min\limits_{i=\overline{1,n}} f_i(x_i^0)$

$f_i\left(x_i^0 + \frac{\varepsilon}{n-1}\right) > \min\limits_{i=\overline{1,n}} f_i(x_i^0)$, $i \neq i_1$

$\Rightarrow \min\limits_{i=\overline{1,n}} f_i(z_i) > \min\limits_{i=\overline{1,n}} f_i(x_i^0) \Rightarrow$?!.

$\Rightarrow$ #.

Доп-в: $\exists\, k$: (1) $\Rightarrow$ x^0-опт. $\in (\underline{I})$.

$\forall x \in M_0$ $\exists x \neq x^0 \Rightarrow \exists j$: $x_j < x_j^0$, $j \leq k$.

$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^0 = A$.

$\Rightarrow x_j^0 > 0 \Rightarrow j \leq k$. (1)

$\min\limits_{i=\overline{1,n}} f_i(x_i) \leq f_j(x_j) < f_j(x_j^0)$, $j \leq k$

$= \min\limits_{i=\overline{1,n}} f_i(x_i^0)$, п.ч.

$\forall x \neq x^0$, $x \in M_0$ $\min\limits_{i=\overline{1,n}} f_0(x_i) < \min\limits_{i=\overline{1,n}} f_i(x_i^0) \Rightarrow x^0$ — опт. (!). #.

$k = \overline{1,n}$:

$$\begin{cases} f_i(x_i^0) = C, \quad i = \overline{1,k} \\ \sum_{i=1}^{k} x_i^0 = A \end{cases}$$

«говорим, что $C < f_{k+1}(0)$.

↓

решаем $\forall$ всех $k \to$ находим x_i^0.

∈ дискретно:

$$\max_{x \in D_0'} \min_{i=\overline{1,n}} f_i(x_i) = \min_{i=\overline{1,n}} f_i(x_i^*) \quad (\underline{I}').$$

$\exists\ y = \{1, \dots, n\}$. ~~$\forall x \in D_0'$ $y(x) = i$~~

$\forall x \in D_0'$ $y(x) = \operatorname{Arg}\min_{i \in y} f_i(x_i)$.

Теорема 3.5

$\exists\ x^*$ - опт. реш-е ресурсов в $(\underline{I}')$:

$|Y(x^*)|$ - минимально среди всех опт. реш-ий.

Тогда если $x_j^* > 0 \Rightarrow f_j(x_j^* - 1) \le \min_{i=\overline{1,n}} f_i(x_i^*)$ (3)

((3) - необх. усл-е опт-ти)

x^* просто усл. $\Leftrightarrow$ (3) – просто усл. $\Leftrightarrow$ оп-т $\overset{*}{\exists}$ в $(\underline{\Gamma}')$.

Доп-во:

необх-ть: x^* – оп. в $(\underline{\Gamma}')$: $|y(x^*)|$ – минимально $\overset{\text{сред всех оп.}}{\Rightarrow}$?

$\Rightarrow$ (3)

$\boxed{\Pi}$: (3) не верно:

$\exists j: x_j^* > 0$ и $f_j(x_j^* - 1) > \min\limits_{i=\overline{1,n}} f_i(x_i^*)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $f_\ell(x_\ell^*)$.

Вне $\exists z: z_i = \begin{cases} x_j^* - 1, & i = j \\ x_\ell^* + 1, & i = \ell \\ x_i^*, & i \neq j; \ell. \end{cases}$

$\min\limits_{i=\overline{1,n}} f_i(z_i) \geq \min\limits_{i=\overline{1,n}} f_i(x_i^*)$.

$\rightarrow$ неопр. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $=$.

т.к. z_i – тоже оп, но

$y(z) = y(x^*) \setminus \{\ell\}$. $\Rightarrow$?! ($|y(x^*)|$ – наим.).

#.

Достр-во: (3) $\overset{?}{\Rightarrow}$ x^* – оп в $(\underline{\Gamma}')$.

$\forall x^* \in M_0'$: $x \neq x^* \Rightarrow \exists j: x_j < x_j^* \Rightarrow$

$\Rightarrow x_j \leq x_j^* - 1$. $(\Rightarrow x_j^* > 0)$

$\Rightarrow$ ↯

$$\min_{i=\overline{1,n}} f_i(x_i) \le f_j(x_j) \le f_j(x_j - e_i) \le$$

(3)

$$\le \min_{i=\overline{1,n}} f_i(x_i^*).$$

$\Rightarrow x^*$ - опт. (что и т. д.!).

#

#

пример $f_i(x) = t$, $i = 1,2 \Rightarrow x^*$ - не опт.

Алгоритм решения (I'):

берём $x^{(1)} \in D_0' \to$ область решений пер. $\to x^0 \to$ опорный.

шаг k: $x^{(k)} \to$ проверяем (3):

если $x_j^{(k)} > 0 \to f_j(x_j^{(k)} - 1) \le \min_{i=\overline{1,n}} f_i(x_i^{(k)})$

если вып., то $x^{(k)}$ - опт.

иначе: $\min_{i=\overline{1,n}} f_i(x_i^{(k)}) = f_\ell(x_\ell^{(k)})$, переберём

1 с j-го по ℓ-ый шаги:

$$x^{(k+1)} \triangleq x_i^{(k+1)} = \begin{cases} x_j^{(k)} - 1, & i = j \\ x_\ell^{(k)} + 1, & i = \ell \\ x_i^{(k)}, & i \ne j, \ell. \end{cases}$$

если $|J(x^k)| = 1$ $\xrightarrow{\text{тогда } \ell}$ $\Rightarrow \min_{i=\overline{1,n}} f_i(x_i^{(k+1)}) > \min_{i=\overline{1,n}} f_i(x_i^{(k)})$.

если $|J(x^{(k)})| \ge 2 \Rightarrow$ $\#J(x^{(k+1)}) \# = J(x^{(k)}) \setminus \{j\}$

$\Rightarrow$ через нек. конечное $|J(x^{(k)})| = 1$. $\Rightarrow$ опт. конечен.

Пример

$$\max_{x \in M_0} \min_{i=\overline{1,4}} i \cdot x_i^2$$

решение

$$f_i(t) = i \cdot t^2, \quad i = \overline{1,4}$$

$A = 10.$

решение:

$f_i(0) = 0, \quad i = \overline{1,4} \Rightarrow k = 4.$

$$\begin{cases} i(x_i^0)^2 = C, \quad i = 1,2,3,4 \\ \sum_{i=1}^{4} x_i^0 = 10. \end{cases} \quad (1)$$

$$x_i^0 = \sqrt{\frac{C}{i}} = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{i}}, \quad i = \overline{1,4}.$$

$$\sqrt{C} \cdot \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{\sqrt{k}} = 10.$$

$$\Rightarrow x_i^0 = \frac{1}{\sqrt{i}} \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{\sqrt{k}}}$$

$x_1^0 \approx 3.59$

$x_2^0 \approx 2.54$

$x_3^0 \approx 2.07$

$x_4^0 \approx 1.8$

Решим дихотомией:

$X^{(1)} = (4, 3, 2, 1)$, повторим (3).

i	$x_i^{(1)}$	$i \cdot (x_i^{(1)})^2$	$i \cdot (x_i^{(1)} - 1)^2$	$x_i^{(2)}$	$i \cdot (x_i^{(2)})^2$	$i \cdot (x_i^{(2)} - 1)^2$
1	4	16	9 → не вошли (3)	3	9	4
2	3	18	8 не вошли (3)	3	18	8
3	2	12	3	2	12	3
4	1	4	0	2	16	4

< 4 ? → yes

$\Rightarrow x^* = (3, 3, 2, 2)$.

≥ 4 ? → да.

$\| \; 9$

Задача:

$$\max_{x \in M_0} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^0) \quad (\text{II}).$$

$\exists f_i(f)$ диффер-мо на $[0, A]$.

(не обязат. возр.)

A - капитал

n предметов

$f_i(t)$ - прибыль от i-го объекта.

$f_i'(t)$ - прибыль на единицу вложения.

Теорема 3.10 (**метод Гиббса**)

$\exists\, x^0$ - опт. распр. в $(\overline{II})$

Тогда $\exists\, \lambda = const$:

$$\begin{cases} f_i'(x_i^0) = \lambda, & x_i^0 > 0 \\ f_i'(x_i^0) \le \lambda, & x_i^0 = 0 \end{cases} \quad (i)$$

если $\forall$ проект $(i)^+$ - вогн-т $f_j(t)$ - дифф. дважды

Утв-е 3.10'

$\exists\, f_i(t)$ $\cap$, если $f_i''(0)$;

$f_1'(0) \ge \dots \ge f_n'(0)$.

$\exists\, f_i''(0) < 0$, $i = \overline{1,n}$.

Тогда $\exists\, \ell$:

$$\begin{cases} x_j^0 > 0, & j = \overline{1,\ell} \\ x_j^0 = 0, & j = \overline{\ell+1,n}. \end{cases}$$

Док-во: Т. 3, ω

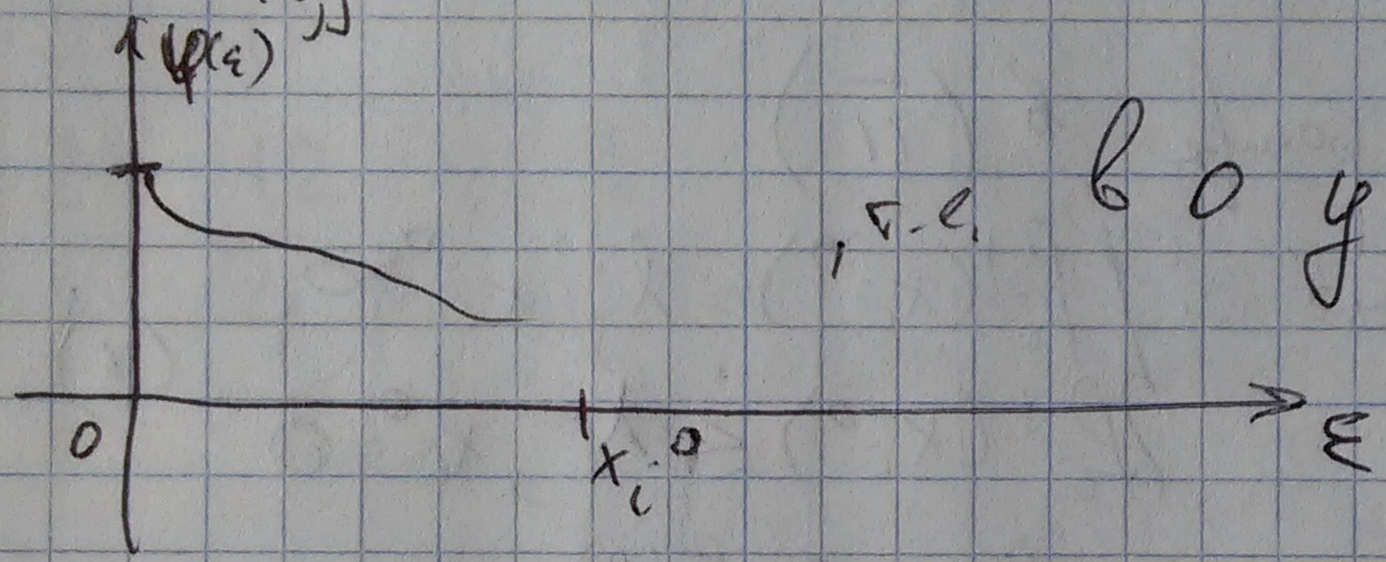
~~}~~

~~}~~

необх: ~~}~~ $x_i^0 - $ оп.

$\exists x_i^0 > 0$. $\forall j \neq i$, ~~$\varepsilon > 0$~~ $\varepsilon \le x_i^0$

рассмотрим $\varphi(\varepsilon) = f_i(x_i^0 - \varepsilon) + f_j(x_j^0 + \varepsilon) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n} f_k(x_k^0)$,



т.е. в 0 у $\varphi(\varepsilon)$ - max.

$\Rightarrow \varphi'(0) \le 0$

$\varphi'(0) = -f_i'(x_i^0) + f_j'(x_j^0) \le 0$.

$\Rightarrow f_j'(x_j^0) \le f_i'(x_i^0)$ (2).

если $x_j^0 > 0$, то $f_j'(x_j^0) \ge f_i'(x_i^0)$ (3)

$\Rightarrow f_i'(x_i^0) = f_j'(x_j^0) = \lambda$. $\Rightarrow$ ~~#~~.

Дост-ть: $f_j(x) \cap$; (1) $\overset{?}{\Rightarrow} x^0 - $ оп.

$\forall x \in M_0$: $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^0)$ (=)

(=) $\sum_{i=1}^{n} (f_i(x_i) - f_i(x_i^0))$ (≥)

(≤) $\sum_{i=1}^{n} f_i'(x_i^0)(x_i - x_i^0) \le$

$\le \sum \begin{cases} \text{если } x_i^0 = 0 \text{ то } x_i - x_i^0 \ge 0 \Rightarrow f_i'(x_i^0) \overset{(1)}{\le} \lambda \\ \text{если } x_i^0 > 0, \text{ то } f_i'(x_i^0) \overset{(1)}{=} \lambda \end{cases} \le$

$\le \sum_{i=1}^{n} \lambda \cdot (x_i - x_i^0) = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} (A - A) = 0.$

$\Rightarrow x^0$ – опт.

#

(#)

Док-во (т в-е $\S$ 10.1)

f' – дифф.

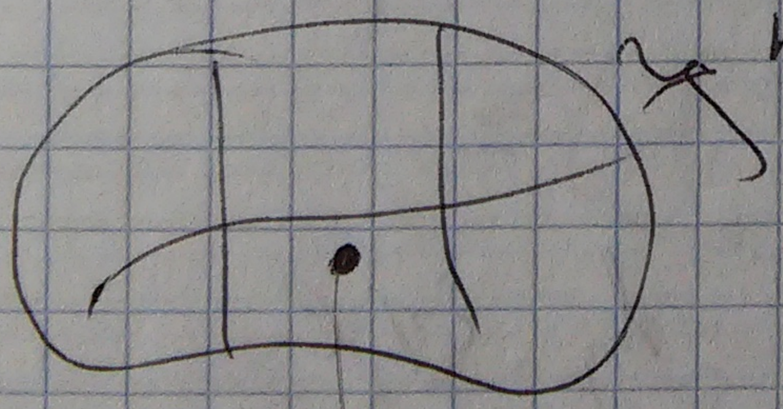
$\square$: $\exists\, x_i^0 = 0$, $x_{i+1}^0 > 0$.

$f_i'(x_i^0) = f_i'(0) \overset{(1)}{\le} \lambda \overset{(1)}{=} f_{i+1}'(x_{i+1}^0) <$ (т.к. f_{i+1}' – строго возр.)

$< f_{i+1}'(0) \overset{\text{усл-е}}{\le} f_i'(0)$ → ⚡

(#)

Пример (задача поиска области).



x_i – i-ая область

x_{i+1} – (i+1)-ая область

x_i – область, где ищем.

$1 - e^{-\mu_i t}$ $\mu_i > 0$ – вер-ть обнаружения в i-ой области, если он там находится.

p_i - вер-п того, что он в об. обнаж.

А. всё время, $x = (x_1, \dots, x_n)$

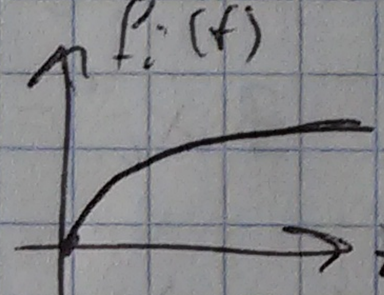
$\Rightarrow$ вер-п обнаружения $= \sum_{i=1}^{n} p_i (1 - e^{-\mu_i x_i}) \to \max_{x \in \Omega}$

$f_i(t) = p_i \cdot (1 - e^{-\mu_i t})$

$f_i'(t) = p_i \mu_i \cdot e^{-\mu_i t}$

$f_i''(t) = -p_i \mu_i^2 e^{-\mu_i t} < 0 \Rightarrow f_i \to \cap_t$

$f_i(0) = 0 \Rightarrow$



$f_i'(0) = p_i \mu_i$

] $f_1(0) \geq f_2(0) \geq \dots \geq f_n(0)$, т.е.

$p_1 \mu_1 \geq p_2 \mu_2 \geq \dots \geq p_n \mu_n$

$\to$ исп-ем метод Лобсо.

$$\begin{cases} f_i'(x_i^0) = p_i \mu_i e^{-\mu_i x_i^0} = \lambda, \quad i = \overline{1, \ell} \\ \sum_{i=1}^{\ell} x_i^0 = A. \end{cases} \to$$ решить и проверить, что $\lambda \geq f_{\ell+1}'(0) = p_{\ell+1} \mu_{\ell+1}$.

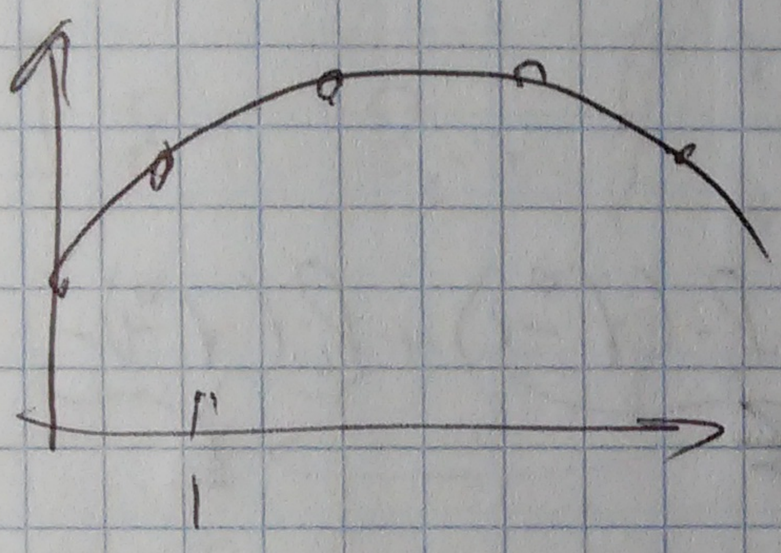
☆ Дискр. задача

$$\max_{x \in M_b^1} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^*) \quad (\text{II}').$$

$\exists\, f_i(t)$ – вогн. ф-я целого аргумента:

- $f_i'(t) \sim f_i(t) - f_i(t-1) \geq f_i(t+1) - f_i(t)$. (1)

$0 \leq t \leq A$.



Лемма $\exists f_i$

$\exists f_i(t)$ вогн. на Y.

Тогда $\forall 0 \leq t^0 \leq A$

1) $t > t^0 \Rightarrow f_i(t) - f_i(t^0) \leq$

$\leq \underbrace{(f_i(t^0+1) - f_i(t^0))}_{\sim f_i'} (t - t^0)$.

2) $t < t^0 \Rightarrow f_i(t) - f_i(t^0) \leq (\underbrace{f_i(t^0) - f_i(t^0-1)}_{\sim f_i'}) \cdot (t - t^0)$

Докажем:

1) $k = t^0$.

$f_i(t) - f_i(t^0) = \underbrace{f_i(t) - f_i(t-1)} + \underbrace{f_i(t-1) - f_i(t-2)} + \underbrace{f_i(t-2) + \dots + f_i(t^0+1) - f_i(t^0)}_{\geq}$

$\geq$ (1) $(f_i(t^0+1) - f_i(t^0))(t - t^0) \geq 0$ #.

2) аналогично: $t < t^0$.

$f_i(t^0) - f_i(t) = \underbrace{f_i(t^0) - f_i(t^0-1)} + \underbrace{f_i(t^0-1) - \dots + f_i(t+1) - f_i(t)}_{\geq}$

$\geq$ (2) $(f_i(t^0) - f_i(t^0-1))(t^0 - t) \geq 0$ #.

(#)

Теорема 3.11 (критерий Гермейера)

x^* - опт. в $(\Pi^1) \Leftrightarrow$

Тогда $x_j^* > 0 \Rightarrow \lambda f_j(x_j^*) - f_j(x_j^*-1) \geq \max_{i=\overline{1,n}} [f_i(x_i^*+1) - f_i(x_i^*)]$ (2).

Дон-во:

необх.:

$\exists x^*$-опт. $\Phi(\overline{1,n}) \overset{?}{\Rightarrow} (2)$.

$\forall j: x_j^* > 0$:

$$f_j(x_j^*) - f_j(x_j^*-1) \le \max_{i=\overline{1,n}} [f_i(x_i^*+1) - f_i(x_i^*)] =$$

$$= f_\ell(x_\ell^*+1) - f_\ell(x_\ell^*).$$

$\exists z$: $z_i = \begin{cases} x_j^*-1, & i=j \\ x_\ell^*+1, & i=\ell \\ x_i^*, & i \ne j, \ell \end{cases}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f_i(z_i) > \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^*), \text{ отв.}$$

$$f_j(x_j^*) + f_\ell(x_\ell^*) < f_j(\underbrace{x_j^*-1}_{z_j}) + f_\ell(\underbrace{x_\ell^*+1}_{z_\ell})$$

$\Rightarrow$?! $\Rightarrow$ #.

Дон-во: $x^* \overset{?}{\Rightarrow} (2) \Rightarrow x^*$-опт. $\Phi(\overline{1,n})$

$\forall x \in D_0$: $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \le \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^*)$ – ?

Пусть, $\exists$:

$$f_i(x_i) - f_i(x_i^*) \le \lambda (x_i - x_i^*), \quad i = \overline{1,n} \quad (3).$$

т.к. тогда $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^*) \le 0$

$\Rightarrow$ доказано реш-е (3).

если $x_i > x_i^* \Rightarrow$ лемма 1) $\Rightarrow$ $f_k \le \lambda$

$\Rightarrow f_i(x_i) - f_i(x_i^*) \le \underbrace{\left(f_i(x_i^* + t) - f_i(x_i^*)\right)}_{\le} \cdot \underbrace{(x_i - x_i^*)}_{>0}$ $\le$

$\le \lambda \cdot (x_i - x_i^*)$

если $x_i < x_i^* \Rightarrow x_i^* > 0 \Rightarrow$ лемма 2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow f_i(x_i) - f_i(x_i^*) \le \underbrace{\left(f_i(x_i^*) - f_i(x_i^* - 1)\right)}_{\ge \lambda} \underbrace{(x_i - x_i^*)}_{<0}$ $\le$

$\le \lambda (x_i - x_i^*)$

$\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ ##

Алгоритм решения:

$x^{(1)}$ = опорное решение пер. задачи.

проверяем усл-е (2):

$x_j^{(k)} > 0 \Rightarrow f_j(x_j^{(k)}) - f_j(x_j^{(k)} - 1) \ge \max_{i=\overline{1,n}} \left[f_i(x_i^{(k)} + 1) - f_i(x_i^{(k)})\right]$

верно $\Rightarrow x^{(k)}$ - опт.

иначе:

$$f_j(x_j^{(k)}) - f_j(x_j^{(k)} - 1) < \max[\ ] =$$
$$= f_\ell(x_\ell^{(k)} + 1) - f_\ell(x_\ell^{(k)})$$

2) $x^{(k+1)}$: $x_i^{(k+1)} = \begin{cases} x_j^{(k)} - 1, & i = j \\ x_\ell^{(k)} + 1, & i = \ell \\ x_i^{(k)}, & i \neq j, \ell \end{cases}$

2) движение вверх.

Задача:

$$\min_{x \in M_0} \sum_{i=1}^{n} f_0(x_i)$$

40 вопросов к экз.
с вопр. в деле
вам можно пользоваться